Section scientifique

Applications des

Mathématiques

Deuxième secondaire

Livre de l'élève

Premier semestre

Auteurs

M. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Nabil Tawfik Eldabe

M. Cerafiem Elias Skander

Révision de traduction

M. Fathi Ahmed chehata

M. Khaled Sayed El Shehabey

M. Akram Fawzy

2025 - 2026

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

Première édition 2015/2016
Numéro de Dépôt 10559 / 2015
Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 016 - 5

INTRODUCTION

بسم الله الرحمن الرحيم

le monde aujourd'hui' connait un développement scientifique continu et la science moderne a contribué à tisser de nouveaux horizons pour l'avenir au point que l'humanité pourrait parvenir à accomplir des percées majeures dan les différentes sciences. Par conséquent le ministère de l'éducation et de l'enseignement vise à développer ses moyens de recherche et à promouvoir les méthodes d'apprentissage en adaptan les concepts scientifiques avancés a fin de former les ètudiants à la recherche scientifique et à un style de pensée qui stimule l'esprit dans les outils de réflexion mondiaux et non seulement pour les examens académiques

Ce livre fait partie des applications des mathématiques pour la deuxinème année secondaire concu comme un outil d'aide pour les étudiants dans les études d'enseignement et les formant dans les domaines de l'analyse et de l'investigation il divise le livre en trois chapitres dans les sections de mécanique , d'ingénierie et de probabilités, chaque section contenant des unités intégrées des résumés des théories modernes dans les domines de la mécanique de la'ingenierie, des probabilités et de l'arithmétique il aborde les de fis des questions contenporaines et enseigne les outils scientifiques nécessaires à l'élève pour maîtriser la matière et saisir ses applications réelles. il explique les relation entre les concepts mathématiques avancés et comment élève peut faire face aux questions.

Nous ésperons qu'avac ce livre, nous avons reussi à faoliter les niveaux de pensée crutique et à relever des questions liées à des domaines ouverts dans la recherche chaque leçon est construite sous letitre «Essay e de resoudre» comprenant chaque sujet de manière simple . Elle comprens également diverses questions liées aux Concepts et aux objectifs fixés pour l'étudiant par le ministrére de l'Eduction.

En fin, nous espérons que notre travail servira nos enfants et no générations futures, avec sincérité et dévotion à Alla, qu est le but ultime et qui nous guide vers le droit chemin.

Avant - Propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.
Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Introduction sur l'évolution de la mécanique. 2

Unité 1

Statique

1 - 1 Forces. 12

1 - 2 Décomposition des force. 20

1 - 3 Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes. 25

1 - 4 Equilibre d'une particule sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes. 31

1 - 5 Équilibre d'un corps sur un plan horzontal rugueux. 42

1 - 6 Équilibre d'un corps sur un plan incliné rugueux. 50

SOMMAIRE

Unité 2

Géométrie et mesure

2 - 1 droite et plan dans l'espace. 58

2 - 2 Pyramide et cône. 64

2 - 3 Aire totale d'une pyramide et d'un cône. 69

2 - 4 Volume d'une pyramide et d'un cône droit. 73

2 - 5 Equation du cercle 78

Mécanique

Introduction sur l'évolution de la mécanique

De manière générale, la mécanique est la science qui étudie le mouvement et l'équilibre d'un corps matériel en utilisant des lois spécifiques. Par exemple, il y a des lois concernant la révolution de la Terre autour du Soleil, le lancement de missiles, de roquettes ou d'un obus d'un canon. La mécanique nous permet l'étude du changement de la position d'un corps matériel dans l'espace au cours du temps. L'influence mécanique entre les corps est l'effet qui change le mouvement de ces corps suivant les différentes forces agissant sur ces corps. Donc, l'objet principal de la mécanique est l'étude des lois du mouvement et de l'équilibre des corps sous l'effet des forces. Cette science peut être divisée en deux domaines:

La statique[1]

(**C'est la science de l'équilibre des corps**) Elle étudie l'équilibre des corps sous l'influence de forces. On dit que les forces qui ne changent pas l'état du corps, sont en équilibre et que le corps est en équilibre sous l'effet de ces forces. L'étude de l'équilibre des corps **(La statique)** a commencé aux anciennes époques comme une nécessité de production des outils simples (comme les leviers, les portails, le plan incliné et autres). Les œuvres d'Archimède étaient un apport important pour fonder la science de la statique à cette époque.

La dynamique[2]

(**C'est la science du mouvement des corps**) Elle étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces. Elle se divise en **cinématique** qui étudie les propriétés du mouvement du point de vue géométrique (description du mouvement sans se soucier des forces qui le provoquent) et la **cinétique** qui étudie l'effet des forces qui provoquent ou qui changent le mouvement. L'étude de la science de dynamique est venue trop tard après l'étude de la statique.

Il y a aussi:

La mécanique du point matériel (un corps dont on peut étudier le mouvement et l'équilibre en négligeant ses dimensions.)

La mécanique du solide (un corps formé d'un ensemble de points tels que pris deux à deux, leur distance est stable et ne varie sous aucune influence extérieure.).

La mécanique des corps à masse variable (certains systèmes ou corps subissent des changements de masse en fonction du temps, ajout ou séparation de corpuscules qui peuvent diminuer ou augmenter sa masse durant le mouvement. Parmi ces corps, on peut citer : les missiles, les

1 On va étudier dans cette unité la notion de force, ses propriétés, ses unités de mesure, la décomposition d'une force en deux composantes. On va calculer la résultante de plusieurs forces concourantes puis étudier l'équilibre d'un point matériel sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes.

2 Dans cette unité (la cinématique) qui décrit le mouvement des corps sans étudier les forces qui le provoquent. Nous allons étudier le mouvement des corps et les phénomènes qui l'accompagnent, leurs causes, leurs lois et leur application sur le mouvement horizontal et vertical munis d'une accélération uniforme et la loi d'attraction universelle de Newton

véhicules miniers dont la masse changent avec la consommation de carburant).

La mécanique des corps qui subissent une déformation réversible (**déformation élastique**) étudie les corps capables de reprendre leurs formes et dimensions initiales lorsque l'influent extérieur s'annule, et ceux qui subissent une déformation irréversible (déformation plastique), lorsque le corps soumis à des influents, il ne reprend plus sa forme initiale après que ces influents s'annulent.

L'évolution de la mécanique

Mécanique classique

L'une de plus ancienne des branches de la Mécanique, elle s'intéresse à l'étude des forces agissant aux corps et l'interprétation du mouvement des planètes et qui aide également aux multiples des techniques modernes (génie civil, génie de l'Architecture, l'observation spatiale, ...)

Mécanique quantique

C'est l'ensemble des théories physiques qui ont apparues au XXème siècle, pour expliquer les phénomènes au niveau de l'atome et des particules. La mécanique quantique a fusionné les propriétés de la particule et de l'onde pour donner le terme de dualité (onde corpuscule). De cette façon la mécanique quantique se charge de l'explication physique au niveau atomique. Elle s'applique aussi à la mécanique classique sans montrer son influence à ce niveau. La mécanique quantique est la généralisation de la physique classique en raison de la possibilité de son application aux niveaux atomiques et général.

La mécanique quantique tire son nom de l'existence de quantas (grandeurs physiques ne pouvant se manifester que par multiples de quantités fixes, ces grandeurs sont par exemple l'énergie ou le moment cinétique des particules.).

Mécanique des fluides:

Cette branche de la mécanique quantique propose d'étudier les fluides (liquides et gaz...) et les forces qui y sont appliquées. Elle se divise en deux parties : la statique des fluides qui est l'étude des fluides au repos et la dynamique des fluides qui étudie des fluides en mouvement.

La mécanique biologique :

La mécanique biologique (biomécanique) : c'est la science de l'étude et l'analyse du mouvement des êtres vivants dans tous les égards (Anatomique, physiologique, corporelle et autres,...), cette science traite les forces appliquées sur les corps vivants soit dans le cas de repos ou bien dans le cas du mouvement. Comme des exemples le mouvement des intestins, le débit sanguin dans les artères, transmission des ovules dans la trompe de Fallope, transmission des liquides dans l'uretère du rognon à la vessie, la digestion où à partir d'une analyse mécanique on peut améliorer les performances des organes

La théorie générale de la relativité

La théorie de la relativité d'Einstein a changé beaucoup de notions concernant les principales expressions de base en physique : le lieu, le temps, la masse et l'énergie. Elle a causé un saut en physique théorique et en physique de l'espace au XXème siècle, au moment de sa publication, et a rectifié la théorie de la mécanique newtonienne qu'on employait depuis 200 ans. La théorie de la relativité a changé la notion de mouvement de Newton en montrant que tout mouvement est relatif. La notion du temps a changé, il n'est plus fixe et limité. L'espace et le temps doivent être perçus comme formant une seule entité alors qu'ils étaient traités en tant que deux éléments différents. La notion du temps dépend de la vitesse des corps et la dilatation et la contraction du temps sont une notion fondamentale pour la compréhension de l'univers. Avec cela, toute la physique classique newtonienne a changé.

Activité

1 - Utilisez le WEB pour chercher les apports des mathématiciens pour l'évolution de la Mécanique. Quelques résultats de la recherche.

Le savant anglais **Isaak Newton** a eu un grand apport pour avoir fondé la mécanique classique, il a établi les lois du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de concernant le mouvement des corps, et les phénomènes astronomiques:

Le savant allemand **Johannes Kepler** et l'italien **Galileo Galilée** avaient un rôle immense à fonder des lois sur le mouvement des planètes. Les lois de Kepler montrent l'existence des force de 1905 à 1916 et la mécanique quantique développée par Max Planck, Heisenberg, Schrödinger gravitation entre les planètes ainsi que le mouvement des planètes autour du soleil comme un centre du mouvement ces restaient dominante jusqu'à la découverte de la théorie de relativité d'**Einstein** et Dirac au début de vingtième siècle.

Ahmed Zewail est le premier à avoir montré comment l'étude des réactions chimiques pouvait être réalisée grâce à des flashs lasers extrêmement brefs (picosecondes puis femto secondes), à l'aide d'un laser décrit comme « l'appareil photo le plus rapide du monde ». L'appareil mis au point permet de voir les mouvements des atomes, ce qui ouvre la possibilité de comprendre leur comportement et de probablement contrôler le résultat de leurs réactions. Le principe qu'il a développé consiste à soumettre un milieu chimique à deux flashs successifs : le premier génère la réaction, le second permet d'analyser par spectroscopie les composés chimiques

Le nom de **Zewail** a été marqué à la liste d'honneur avec **Albert Einstein** et **Graham Bell**.

Pour des informations supplémentaires cherchez dans l'Encyclopédie Wikipedia sur la site internet : http: //ar.wikipedia.org

Unité des mesures

Lorsque un étudiant se présente aux facultés militaires, il soumet à des examens médicaux concernant la taille, le poids, la tension, la fréquence cardiaque,………….L'opération de la mesure est une comparaison entre deux quantités de même genre pour savoir le rapport entre leurs grandeurs. Le système utilisé dans la plus part de pays du monde es le système international unifié des mesures (S.I). Ce système se compose des unités de sept unités de bases qui sont standardisées par la mesure directe à l'aide des unités normatives pour la longueur, le temps et

la masse et qui sont gardées au centre des mesures à sèvres en France. Les autres unités sont dérivées des unités de base.

I Unité du système de mesure métrique :

Le tableau suivant montre les unités de base du système métrique et quelques transformations concernant ce système

Grandeur de base	Nom de l'unité	Symbole
Longueur	Mètre	(m)
Masse	Kilogramme	(kg)
Temps	Seconde	(s)

La caractéristique de ce système est la facilité de conversion d'une unité à une autre.

A joutez à vos connaissances

1- Le femto-seconde : est une partie d'un million de milliard de seconde, c'est-à-dire, un femto seconde vaut 10^{-15} secondes. Le rapport entre la seconde et le femto seconde est la même que celui entre la seconde et 32 millions années.

En 1990, le savant égyptien Ahmed Zewail a confirmé sa découverte connue sous le nom la chimie de femto, après un épuisant effort de son équipe de chercheurs à l'institut technologique de Californie depuis 1979. Sa découverte a montré comment se faisaient les liaisons chimiques à l'échelle de quelques femto secondes, soit un millionième de milliardième de seconde à l'aide des flashs lasers extrêmement brefs décrit comme « l'appareil photo le plus rapide du monde ». L'appareil mis au point permet de voir les mouvements des atomes, ce qui ouvre la possibilité de comprendre leur comportement et de probablement contrôler le résultat de leurs réactions. Cela a permis l'intervention rapide au moment des réactions chimiques à l'aide du laser comme télescope pour voir et suivre les opérations de destruction et de développement dans la cellule. Ce grand savant arabe a mis sa découverte au service de la médecine, la physique, la cosmologie et beaucoup d'autres. Il a donné son nom à une école scientifique au nom du femto chimie..

2- Multiples des unités:

Unité	symbole	mesure
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	K	10^{3}

Sous-unités:

Unité	symbole	mesure
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	u	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes :

1. 2,75 Km en m.
2. 635 mm. en dm
3. 750 k.Hertz en M.Hertz.
4. 1970 gm en kg.

Comme suivant :

1. 2,75 Km =2,75 × 1000 = 2750 m
2. 635 mm = 635 × 10^{-2} = 6,35 dm.
3. 750 kilohertz = 750 × 10^{-3} = 0,75 mégahertz
4. 1970 gm = 1970 × 10^{-3} =1,97 kilogramme

Rappel

km = 1000m

m = 10 dm

dm = 10 cm

cm = 10 mm

II Grandeurs dérivées :

1 La vitesse

La vitesse est le taux de variation de la distance par rapport au temps. L'unité de mesure de la vitesse = L'unité de mesure de la distance: L'unité de mesure du temps. Alors l'unité de mesure de la vitesse est: mètre/seconde (m/s).

Savez-vous

La séconde normative est le temps découlé par l'atome de césium pour osciller d'une tour complète.

2 L'accélération

L'accélération est le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. L'unité de mesure de l'accélération: mètre/seconde au carré (m/s^2). A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes **:**

1. 1 km/h en m/s.
2. 1km/h en cm/s.
3. 1 km/h/s en m/s^2
4. 1km/h/s en cm/s^2

Rappel

Les unités de mesure des quantités vectorielles (la vitesse, l'accélération, la force) décrivent seulement les intensités sans prendre la direction en compte

Comme suivant :

1. $1km/h \quad = \dfrac{1 \times 1000\ m}{60 \times 60\ s} \quad = \dfrac{5}{18}\ m/s$

Rappel

Un jour = 24 heures
Un heure = 60 min.
Minute. = 60 sec.

(2) 1 km/h $= \frac{1 \times 1000 \times 100\text{cm}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{250}{9}$ cm/s

(3) km/h/s $= \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s} \times \text{s}} = \frac{5}{18}$ m/s²

(4) km/h/s $= \frac{1000 \times 100\text{cm}}{60 \times 60 \text{ s} \times \text{s}} = \frac{250}{9}$ cm/s²

Exercice

(1) Convertissez chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes:

(a) 72 km/h en m/s (b) 1000 cm/s en km/h (c) 36 km/h/s en cm/s²

3 La force

La force est le produit de la masse (m) par l'accélération (a).

Si le symbole de la force est (F) alors $F = m \times a$.

Unités de mesure de l'intensité de force

Les unités absolues:

Comme Dyne et Newton où 1 Newton = 10^5 Dyne, Le Newton et Le Dyne sont définies comme le suivant:

Le Newton : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 kilogramme lui imprime une accélération d'intensité 1 m /s²

Le Dyne : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 gramme lui imprime une accélération d'intensité 1 cm /s²

Ajoutezàvos connissances

Tous les corps (en négligeant sa masse) tompent sur le sol avec une accélération uniform entre 9,78 et 9,82 m/s² selon de latitudes pour faciliter on va la consedérer 9,8 m/s² .

Les unités gravitationnelles:

Comme le gramme poids (g.p) et le kilogramme poids (kg.p.) où 1 kg.p. = 10^3 g.p.

Le kilogramme poids et le gramme poids sont définies ci- dessous:

Le kilogramme poids : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 kilogramme lui imprime une accélération d'intensité 9,8 m /s²

Le gramme poids : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 gramme lui imprime une accélération d'intensité 980 cm /s²

Les unités gravitationnelles et les unités absolues sont liées par la relation: 1 kg.p. = 9,8 Newton et 1 g.p. = 980 dyne.

A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes :

1. 3,14 Newton en dyne
2. $6,75 \times 10^7$ Dyne en Newton

Comme suivant :

1. 3,14 Newton $= 3,14 \times 10^5 = 314000$ Dyne
2. $6,75 \times 10^7$ Dyne $= 6,75 \times 10^7 : 10^5 = 675$ Newton

Exercice

2. Convertissez chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes:

   a. $\frac{1}{7}$ g.p. en dyne
   b. $5,36 \times 1250$ dyne en Newton
   c. 2,50 Newton en dyne

On peut mettre les grandeurs dérivées dans le tableau suivant:

Grandeur dérivée	Relation avec d'autres grandeurs	Unités de mesures
La vitesse (v)	La distance : Le temps	m/s
L'accélération (a)	La vitesse : Le temps	m/s^2
Force (F)	La masse $\times$ L'accélération	Newton

Vérifiez votre compréhension

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. L'unité de mesure de la masse est:

   a) Le Dyne b) Le Newton
   c) Le kilogramme d) Le kilogramme poids

2. Des grandeurs de base dans le système international est:

   a) La masse b) La vitesse c) l'accélération d) La force

3. Le millilitre est une unité équivalente à:

   a) 10^{-3} mètres b) 10^{-3} mètres cubes c) 10^{-2} centimètres d) 10^{-4} décimètres

Répondez aux questions suivantes :

4. Que peut-on dire des quantités suivantes?

   a) 10^{-2} mètres b) 10^{-3} mètres c) 1000 mètres

5. Convertissez chacun de ce qui suit en mètres:

   a) 63,4 centimètres b) 512,6 millimètres c) 0,534 décimètres

6. **Pensé critique :** Calculez en kilogrammes la masse de l'eau nécessaire pour remplir un récipient dont la forme d'un parallélépipède rectangle dont la longueur 1,6 mètres, la largeur 0,650 mètres et la hauteur 36 centimètres sachant que la densité de l'eau est égale à 1 g/cm^3 en approchant le résultat à un entier près.

   [Conseil : La masse = le volume × la densité]

Unité 1

Statique

Introduction de l'unité

La science de statique s'intéresse à la solution de tous les problèmes de nature géométriques qui concernent l'étude de l'équilibre des corps matériaux ainsi que la composition et la décomposition des forces qui leur sont appliquées et l'influence mutuelle entre ces corps. Les applications différentes de la statique sont multiples comme la construction des immeubles, des bâtiments et les ponts également la conception des outils et des machines. Newton avait œuvres et des recherches dans ce domaine parmi lesquels Principes mathématiques de la philosophie naturelle qui comporte trois parties qui sont la base de la science de Mécanique classique. L'une des citations célèbre de Newton « Je ne sais pas comment je m'apparais pour le monde mais je m'apparais pour moi-même comme si j'étais un petit enfant qui joue de temps en temps au bord de la mer pour Trouvez un petit caillot lisse ou un merveilleux coquillage tandis que l'océan de la vérité est étendue vague et remplir des secrets devant moi ".

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Trouvez la résultante de deux forces son intensité et sa direction (les deux forces agissant dans un même point).
- Décomposer une force donnée en deux composantes.
- Décomposer une force donnée en deux composantes orthogonales.
- Trouvez la résultante de plusieurs forces coplanaires concourantes.
- Étudier l'équilibre d'un point matériel sous l'effet de plusieurs forces coplanaires, concourantes dans les cas suivants : si deux forces coplanaires, concourantes sont en équilibre:-
- Distinguer entre les surfaces lisses et rugueuses
- Comprendre le concept de friction et ses propriétés.
- Comprendre la force de friction et la force finale de friction.
- Déterminée le coefficient de friction et l'angle de friction entre eux.
- Déterminée les condition d'équilibré d'un corps est place sur une surface horizontale rugueux.
- Déterminée les condition d'équilibré d'un corps est placé sur une surface inclinées l'esse.
- La mesure de l'angle d'inclinaison sur la surface horizontal est effectuée forsqu'un corps est placé sur une surface rugueuse inclinée à condition qu'il soit sur le point de glisser sous l'effet de son propre poids .
- Répondre de applications pratiques de la friction.

Vocabulaires de base

- Statique
- Force
- Corps rigide
- Force de gravitation
- Accélération d'une chute libre
- Newton
- Dyne
- Kilogramme. poids
- Gramme.poids
- Droite d'action d'une force
- Décomposition d'une force
- Composante d'une force
- Equilibre d'un corps
- Principe du triangle de forces
- Principe de Lamé
- Equilibre d'un corps rigide
- Plan lisse
- Plan lisse incliné
- Centre de gravité
- Frottement
- Surface lisse
- Surface rugueux
- Réaction normale
- Force de frottement statique
- Force de frottement dynamique
- Force de frottement statique limite
- Réaction résultante
- Angle du frottement
- Plan horizontal rugueux
- Plan incliné rugueux

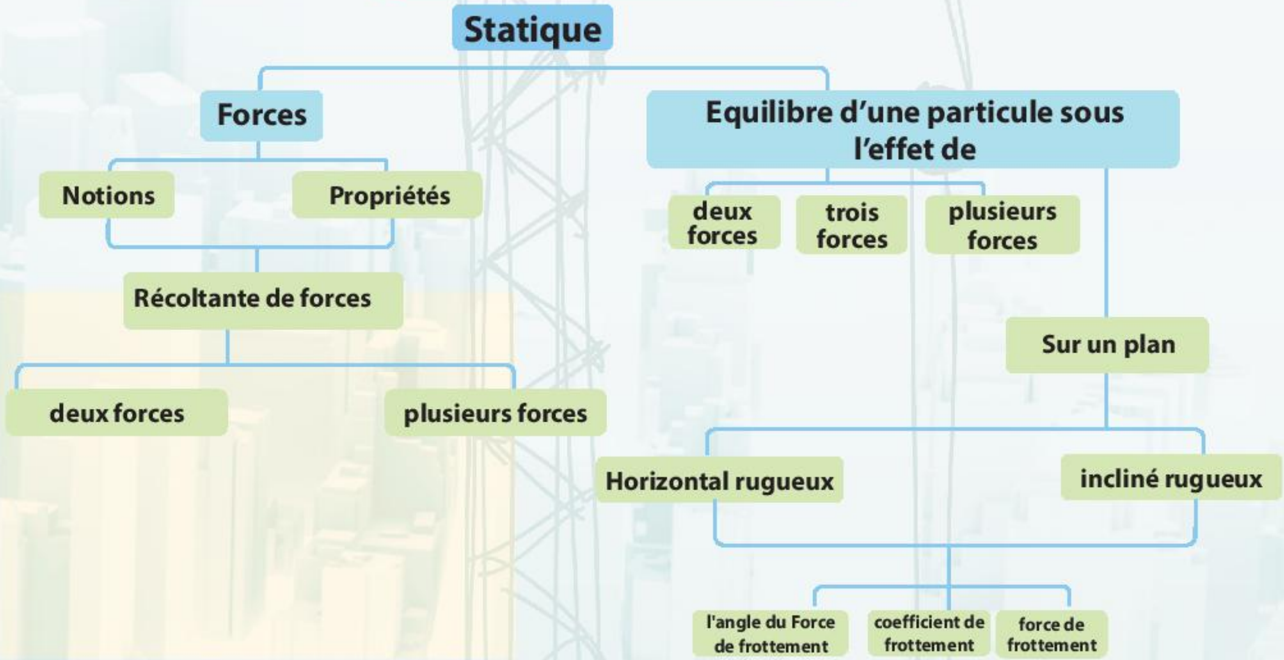
Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Forces.
Leçon (1 - 2): Décomposition d'une force en deux composantes.
Leçon (1 - 3): Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes.
Leçon (1 - 4): Equilibre d'une particule sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes.
Leçon (1 - 5): Équilibre d'un corps sur un plan horzontal rugueux.
Leçon (1 - 6): Équilibre d'un corps sur un plan incliné rugueux.

Matériel utilisé

- Calculatrice scientfique
- Logiciel graphisme

Organigramme de l'unité



1 - 1 Forces

Allez apprendre

- Quelques notions de base de la statique.
- Propriétés des forces.
- Résultante de deux forces concourantes.
- Trouvez la résultante de deux forces concourantes analytiquement.

Vocabulaires de base

- Force
- Résultante
- Corps rigide
- Force de gravitation
- Accélération de la chute libre
- Newton
- Dyne
- Kilogramme.pods
- Gramme.pods

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logical graphisme

Préface:

Vous savez que la statique est une branche des mathématiques qui propose d'étudier les forces et les conditions d'équilibre des corps matériels sous l'effet de ces forces. Dans cette unité, nous allons étudier l'équilibre des corps rigides (1) uniquement. Vous avez déjà étudié la différence entre les quantités scalaires et les quantités vectorielles(1).

Rappel

La quantités scalaire est déterminée par un nombre réel (intensité) comme : distance, temp, masse, aire.
La quantités vectorielle est déterminée par sa valeure et sa direction, comme : vitesse, force, déplacement

Force

L'état d'équilibre d'un corps dépend de la nature de l'influence mécanique entre ce corps et les autres corps c'est-à-dire il dépend de l'état de la pression ou l'attraction ou de la répulsion effectuées sur le corps et dues à cette influence.

1 Définition

➢ Une force est définie par l'effet que produit un corps sur un autre

Propriétés d'une force:

L'effet produit par une force dépend de trois facteurs qui sont:

(i) L'intensité de la force (Sa valeur numérique).

L'intensité d'une force est déterminée en la comparant à l'unité de force de base et l'unité de force de base en mécanique est le Newton **(N)** le kilogramme. poids **(kg.p) où:**

➢ 1 kgp = 1000 gp et 1 Newton = 10^5 dyne

➢ 1 kgp = 9,8 Newton et 1 gp = 980 dyne

(Sauf indication contraire)

Enrichissez vos connaissances

Les corps physique se divisent à :
- des corps rigides qui conservent sa forme quelque soit l'intensité de la force agissante sur eux.
- Des corps déformables, changeant leurs formes dés une force leur a appliqués comme : Liquide, gaz , caoutchouc, patte à modeler, ………

1- Un corps rigide est un corps qui conserve sa forme sans déformation s'il est soumis à l'influence de facteurs extérieurs.

2- La force de gravitation (le poids) est la force de l'attraction terrestre agissant sur le corps. La Terre attire les corps en chute se dirigeant vers elle. L'intensité de l'accélération agissant sur un corps en chute libre diffère d'un lieu sur la Terre à un autre. Une valeur approchée de l'accélération terrestre est 9,8 m/s^2 sauf indication contraire. Nous allons exposer ce thème en détailles dans d'autres parties de la mécanique.

(ii) La direction de la force

La figure (1) ci-contre, représente une force $\overrightarrow{F}$ par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ où le point A est l'origine et le point B est l'extrémité de la force. L'intensité de la force est exprimée par la nome du vecteur $\|\overrightarrow{AB}\|$ (sa longueur)(à une échelle convenable). Le sens de la flèche indique la direction de la force et l'angle θ est appelé l'angle polaire du vecteur dans le plan de la forc $\overrightarrow{F}$, et les note sous la forme polaire (F, θ)

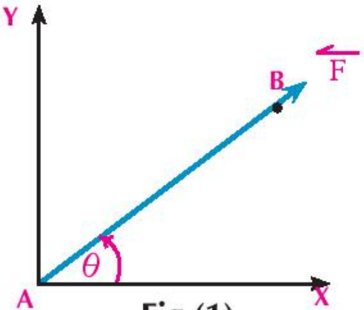


Fig (1)

Enrichissezvos connaissances

L'angle polaire, c'est l'angle positif que fait le vecteur avec la direction positive de l'axe des abscisses.

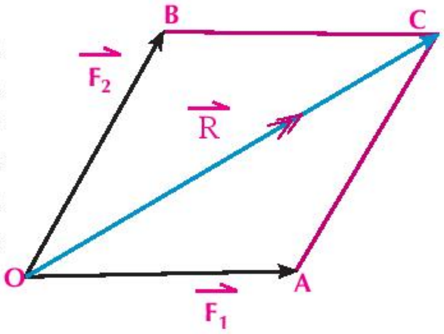
(III): L e point d'application de la force

Dans la figure (1) : Généralement, le point A se coïncide au point d'action de la force $\overrightarrow{F}$, mais le déplacement du point d'application de la force $\overrightarrow{F}$ en un autre point sur la droite d'action de $\overrightarrow{F}$ ne change pas l'effet de la force sur le corps comme le montre la **figure (2),** Dans la **figure (1)** $\overrightarrow{AB}$ est appelée la droite d'action de la force $\overrightarrow{F}$,Donc la droite d'action d'une force est la droite passant par le point d'action de la force et parallèle à sa direction.

Figure (2)

Résultante de deux forces concourantes:

Si deux forces agissent sur corps en un même point, la force résultante agit au même point. Cette résultante a le même effet que les deux forces Elle est représentée géométriquement par la diagonale du parallélogramme dont deux côtés consécutifs représentent les deux forces Dans la figure ci-contre, on trouve que $\overrightarrow{R}$ représentant la diagonale $\overrightarrow{OC}$ représente, la résultante des deux forces. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$



c.à.d.: $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

Activité

Utiliser le logiciel (Geogebra)

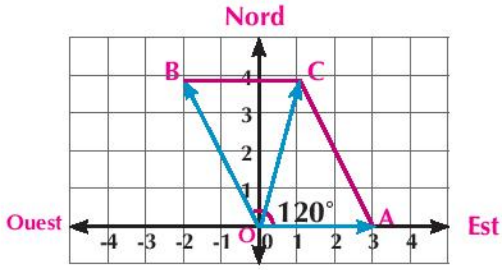
① $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont deux forces agissant en un même point d'un corps rigide telles que $\overrightarrow{F_1}$ = 300 Newton agissant dans la direction de l'Est et $\overrightarrow{F_2}$ = 400 agissant dans une direction faisant un angle de 60° Nord-Ouest. Calculer la résultante de ces deux forces

Solution

Choisissez une échelle de 1 cm pour représenter 100 Newton.

Tracez $\overrightarrow{OA}$ qui représente $\overrightarrow{F_1}$ où $\|\overrightarrow{OA}\|$ = 3 cm dans la direction positive de l'axe des abscisses.

Tracez l'angle polaire $\angle$ AOB tel que m($\angle$ AOB) = 120°

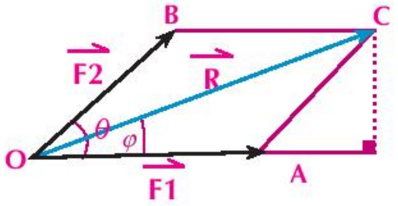


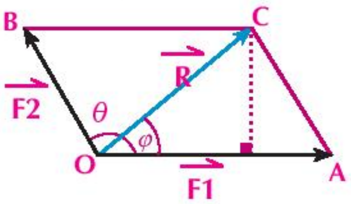
Puis tracez $\overrightarrow{OB}$ qui représente $\overrightarrow{F_2}$ où $\|\overrightarrow{OB}\| = 4$ cm.
On complète le parallélogramme OACB,
Remarque que la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ est représentée par le segment orienté $\overrightarrow{OC}$,
A l'aide du logiciel, on trouve que $\|\overrightarrow{OC}\| \simeq 3{,}6$ cm. **d'où** $R \simeq 3{,}6 \times 100 = 360$ N
Remarquez que $\overrightarrow{OC}$ forme avec $\overrightarrow{OA}$ un angle de mesure 73° 53` 53``
d'où la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est d'intensité d'environ 360 Newton qui forme un angle de mesure 73° 53` 53`` avec la direction de $\overrightarrow{F_1}$.

Application sur l'activité

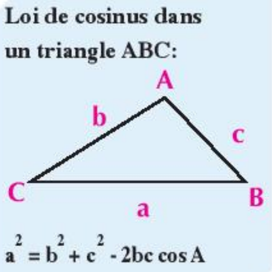
1) Utiliser le logiciel (*GeoGebra*) pour trouvez la résultante de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ agissant en un même point d'un corps rigide telles que $\overrightarrow{F_1} = 400$ Newton agissant dans la direction de l'Est et, $\overrightarrow{F_2} = 500$ Newton agissant dans une direction faisant un angle de 80° Nord-Est.

Résultante de deux forces concourantes analytiquement





Rappel



Soient $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces concourantes en un point O, Si la mesure de l'angle entre les directions de deux forces est θ et $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, représentent $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ alors $\overrightarrow{OC}$ représente la résultante $\overrightarrow{R}$.
Si φ est la mesure que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la force $\overrightarrow{F_1}$ alors d'après la loi de cosinus, nous pouvons trouvez l'intensité et la direction de la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ d'après les formules:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{F_2 \sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}$$

où : F_1, F_2 et R sont les intensités des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{R}$ respectivement.
Réfléchissez : Comment démontrez les formules précédentes?

Exemple

1) Deux forces d'intensités 3 et $3\sqrt{2}$ Newton sont appliquées en un point matériel. L'angle formé par leur direction mesure 45°. Trouvez l'intensité de la résultante et la mesure qu'elle fait avec la première force.

Solution

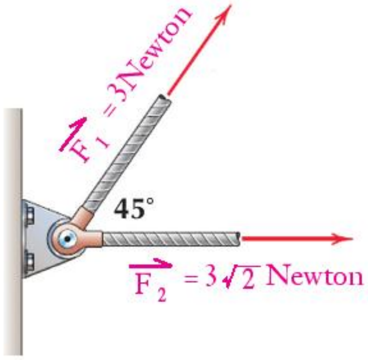
En posant: $F_1 = 3$, $F_2 = 3\sqrt{2}$, $\theta = 45°$

$\because \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$

$\therefore \quad R = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{2})^2 + 2\times 3\times 3\sqrt{2}\cos 45°}$

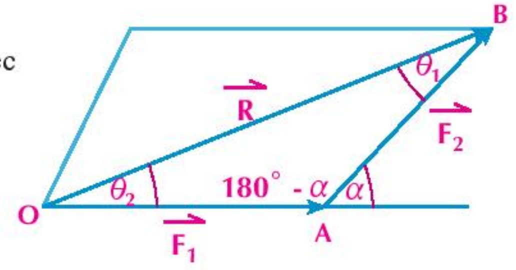
$= \sqrt{9 + 18 + 18\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ Newton

$\because \tan\varphi = \frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta} \quad \therefore \tan\varphi = \frac{3\sqrt{2}\times\sin 45°}{3 + 3\sqrt{2}\cos 45°} = \frac{1}{2}$



En utilisant une calculatrice on a : $m(\angle\theta) = 26° 33' 54''$

Une autre solution de la deuxième partie de l'exemple: Dans la figure dessous le triangle OAB représente les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ tel que θ_1 est la mesure de l'angle que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la ligne d'action de $\overrightarrow{F_2}$.



θ_2 est la mesure de l'angle que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la ligne d'action de la force $\overrightarrow{F_1}$

En utilisant la loi de sinus:

Remarquez que : $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,

alors : $\dfrac{F_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{F_2}{\sin\theta_2} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$ où $\alpha = \theta_1 + \theta_2$

Nous utilisons cette formule pour trouver la mesure de l'angle que fait la résultante avec les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$

Dans l'exemple précédent:

Pour trouver la mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ on utilise la relation:

$$\frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad \therefore \frac{3\sqrt{2}}{\sin\theta_2} = \frac{3\sqrt{5}}{\sin 45} \qquad \text{alors } \sin\theta_2 = \frac{3\sqrt{2}\times\sin 45°}{3\sqrt{5}}$$

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F_1}$ est 26° 33\` 54\`\` et c'est le même résultat déjà trouvé.

Remarque : on peut utiliser cette méthode pour résoudre les exercices.

Essayez de résoudre

(2) Deux forces d'intensités 10 et 6 Newton sont appliquées en un point matériel. L'angle formé par leurs directions mesure 60°. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la première force.

Pensé critique: Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans les cas suivants:

1- Si les deux forces sont orthogonales.

2- Si les deux forces sont de même intensité.

> **Rappel**
>
> **Si** $\overrightarrow{F_1} \perp \overrightarrow{F_2}$ **alors :**
>
> $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
>
> $\tan\varphi = \dfrac{F_2}{F_1}$

Exemple

(2) Trouvez l'intensité et la direction de la résultante pour $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans chacun des cas suivants:

a) $F_1 = 5$ Newtons et $F_2 = 12$ Newtons et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 90°

b) $F_1 = F_2 = 16$ Newton et la mesure de l'angle de deux forces est égale à 120°

Solution

a) $\because \overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont orthogonales, donc $m(\angle\theta) = 90°$ Donc $\sin(\theta) = 1$ et $\cos(\theta) = 0$

$\therefore R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ d'où $R = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$ Newton

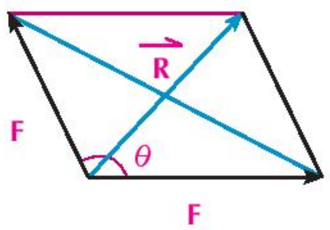
La direction de la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ est: $\tan\varphi = \dfrac{F_2}{F_1}$ d'où $\tan\varphi = \dfrac{12}{5}$

La mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ est 67° 22' 49''

b $\because R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos\theta}$ et en posant $F_1 = F_2 = 16$ Newtons

$\therefore R = \sqrt{(16)^2 + (16)^2 + 2 \times 16 \times 16 \cos 120} = 16$ Newton

D'après la figure ci-contre, on remarque que $F_1 = F_2 = R = 16$ Newtons et que la résultante est une bissectrice de l'angle entre les deux forces de même intensités et que la mesure de l'angle que fait la résultante avec chacune des deux forces est égale à 60°



on remarque de la figure : $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2}R}{F}$ $\quad\therefore\quad R = 2F\cos\frac{\theta}{2}$

Essayez de résoudre

3 Trouvez l'intensité et la direction de la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans chacun des cas suivants:

a $F_1 = 4{,}5$ Newton, $F_2 = 6$ Newton et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 90°

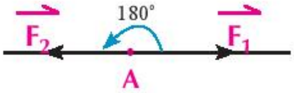
b $F_1 = F_2 = 12$ Newton et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 60°

Cas particuliers:

1- Si les deux forces ont la même droite d'action et si elles sont dans le même sens:

- Dans ce cos m ($\angle\theta$) = 0° et alors $\cos\theta = 1$ en substituant dans la formule de la résultante, on trouve que : $R = F_1 + F_2$, et la résultante a le même sens que celles des deux forces. Dans ce cas, R est appelée **la valeur maximale** de la résultante.

2- Si les deux forces ont la même droite d'action et elles sont de sens contraires:



- Dans ce cas $\theta = 180°$ et alors $\cos\theta = -1$ en substituant dans la formule de la résultante, on trouve que: $R = |F_1 - F_2|$ et la résultante a la même direction que la force de la plus grande intensité.
  Dans ce cas, R est appelée **la valeur minimale** de la résultante.

Exemple: Trouvez la valeur maximale et la valeur minimale de la résultante de deux forces d'intensités 4 et 7 Newtons.

- La valeur maximale = 4 + 7 = 11 Newtons Elle agit dans la même direction que les deux forces.
- La valeur minimale = |4 – 7| = 3 Newtons Elle agit dans la direction de la force d'intensité 7 Newton.

Exemple

3 Deux forces d'intensités F et 4 Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 120°. Si l'intensité de leur résultante est égale à $4\sqrt{3}$ Newton. Trouvez l'intensité de $\overrightarrow{F}$ et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F}$.

Solution

Par substitution : $F_1 = F$, $F_2 = 4$, $R = 4\sqrt{3}$, $\theta = 120°$

Dans la formule : $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1 F_2 \cos\theta$

$\therefore\ (4\sqrt{3})^2 = F^2 + (4)^2 + 2 \times F \times 4 \cos 120°$

$\therefore\ F^2 - 4F - 32 = 0$ Donc: $(F + 4)\ (F - 8) = 0$ d'où $F = -4$ refusé

Pour Trouver la mesure de l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$ on utilise la formule: $\tan\varphi = \dfrac{F_2 \sin\theta}{F_1 + F_2 \cos\theta}$

$\therefore\ \tan\varphi = \dfrac{4 \times \sin 120°}{8 + 4 \times \cos 120°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1} = 30°$

Autre solution pour la deuxième partie:

Pour trouver la mesure de l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$ on utilise la loi de sinus: $\dfrac{F_2}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\theta}$

$\therefore\ \dfrac{4}{\sin\varphi} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 120}$

$\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$ En simplifiant

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F}$ est égale à 30°

Essayez de résoudre

4) Deux forces d'intensités 6 et F kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle de deux forces est égale à 135°. Trouvez l'intensité de la résultante sachant que sa droite d'action de la résultante fait un angle de mesure 45° avec la ligne d'action de la force F.

Expression orale : Trouvez la résultante de deux forces de même intensité, de même ligne d'action et de deux sens contraires.

Exercises (1 - 1)

Complétez ce qui suit:

1) L'effet d'une force sur un corps est déterminé par ....

2) Le vecteur résultant des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est égal à ....

3) La valeur maximale de la résultante de deux forces concourantes d'intensités 4 et 6 Newton est égale à ....

4) La valeur minimale de la résultante de deux forces concourantes d'intensités 5 et 9 Newton est égale à ....

5) Deux forces d'intensités 2 et 3 N. Si la mesure de l'angle de deux forces est 60°, alors l'intensité de leur résultante est ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6) L'intensité de la résultante des deux forces d'intensité 3 et 5 Newton et la mesure de leur angle est 60°, est égale à.

a) 2 Newton b) 6 Newton c) 7 Newton d) 8 Newton

7) Si deux forces d''intensités 3 et 4 Newton ont une résultante d'intensité 5 Newton alors la mesure de l'angle de deux forces est égale à

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

8) Si deux forces de même intensité 6 Newton ont une résultante d'intensité 6 Newton, alors la mesure de l'angle de deux forces est égale à

a) 30° b) 60° c) 120° d) 150°

9) Si deux forces d'intensités 3 et F Newton, la mesure de l'angle de leurs directions est de 120° et si leur résultante est orthogonale à la première force alors la valeur de F en Newton est égale à

a) 1,5 b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) 6

10) Si deux forces d'intensités 6 et 8 Newton sont orthogonales, alors le sinus de l'angle que fait leur résultante avec la première force est égal à:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

Répondez aux questions suivantes:

11) Deux forces d'intensités 5 et 10 Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la première force.

12) Deux forces d'intensités 3 et $3\sqrt{2}$ kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle formé par leur directions est égale à 45°. Trouvez l'intensité et la direction de leur résultante.

13) Deux forces d'intensités 15 et 8 kgp sont appliquées en un point matériel. Si l'intensité de leur résultante est égale à 13 kgp, Trouvez la mesure de l'angle de ces deux forces.

14) Deux forces d'intensités 8 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Si l'intensité de leur résultante est égale à $F\sqrt{3}$ N , Trouvez la valeur de F.

15) Deux forces d'intensités 4 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre elles est égale à 135°. Si leur résultante fait un angle de 45° avec la force F, Trouvez la valeur de F.

16) Deux forces d'intensités 4 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Si leur résultante est orthogonale à la première force, Trouvez la valeur de F.

17) Deux forces d'intensités F et $F\sqrt{3}$ F Newton sont appliquées en un point matériel. Si l'intensité de leur résultante est égale à 2F Newton, Trouvez la mesure de l'angle de deux forces.

18) Deux forces d'intensités 12 et 15 Newton sont appliquées en un point matériel. Le cosinus de l'angle de ces deux forces est égal à $\frac{-4}{5}$. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle qu'elle fait avec la première force.

19) Soient deux forces de même intensité F kgp. La mesure de leur angle est égale à 120°. Si on double les intensités des deux forces et si la mesure de leur angle devient 60°, l'intensité de leur résultante augmente de 11 kgp par rapport à la situation initiale. Trouvez la valeur de F

20 Deux forces d'intensités 12 et F kgp agissent en un point matériel. La première force agit dans la direction Est. La deuxième force agit dans la direction 60° Sud-ouest. Trouvez l'intensité de F et l'intensité de la résultante sachant que la droite d'action de la résultante agit dans la direction 30° Sud-Est.

21 F_1 et F_2 sont deux forces appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre elles est égale à 120° et l'intensité de leur résultante est égale à $\sqrt{19}$ Newton. Si la mesure de l'angle entre les deux forces devient 60°, l'intensité de la résultante sera égale à 7 Newton. Trouvez la valeur de F_1 , F_2

22 Deux forces d'intensités F et 2F kgp sont appliquées en un point matériel. Si on double l'intensité de la seconde force et on augmente l'intensité de la première force de 15 kgp, la direction de la résultante ne change pas. Trouvez la valeur de F.

Décomposition des forces

Allez apprendre

- Décomposition d'une force en deux directions données.
- Décomposition d'une
- force en deux directions orthogonales.

Vcabulaire de base

- Composante d'une force
- Triangle de forces
- Centre de gravité

Aides pédagogiques

- Calculatrice Scientifique.
- Logiciels de Graphisme.

Préface:

En général la décomposition d'une force en plusieurs composantes consiste à trouvez un ensemble de plusieurs forces dont la force donnée est leur résultante. Notre étude se limitera à la décomposition d'une force dans deux directions données.

Décomposition d'une force en deux forces dans deux directions données

La figure (1) montre la résultante $\overrightarrow{R}$ qu'on veut décomposer dans les deux directions $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ qui forment les angles de mesure θ_1 , θ_2 respectivement avec $\overrightarrow{R}$ soient les deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$

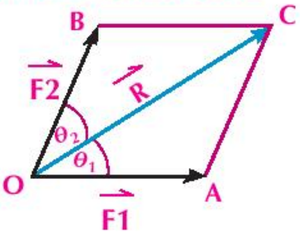


figure (1)

La figure (2) montre le triangle de forces en remarquant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$

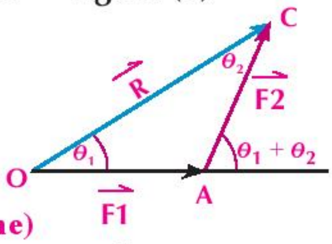


figure (2)

(D'après les propriétés du parallélogramme)

En appliquant la loi de sinus, on trouve que :

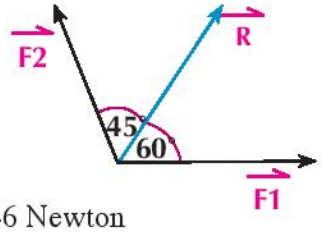
➢ $$\frac{F_1}{\sin\theta_2} = \frac{F_2}{\sin\theta_1} = \frac{R}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Remarquez que: $\sin[180° - (\theta_1 + \theta_2)] = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

Exemple

1. Décomposez une force d'intensité 12 Newton en deux composantes formant avec cette force deux angles de mesures 60° et 45° de sorte que les deux forces soient de part et d'autre par rapport à la force. Arrondissez les résultats à quatre décimales près.

Solution



En appliquant la loi de sinus:

$$\frac{F_1}{\sin 45°} = \frac{F_2}{\sin 60°} = \frac{12}{\sin 105°}$$

$$\therefore F_1 = \sin 45° \times \frac{12}{\sin 105°} \simeq 8{,}7846 \text{ Newton}$$

$$F_2 = \sin 60° \times \frac{12}{\sin 105°} \simeq 10{,}7589 \text{ Newton}$$

Essayez de résoudre

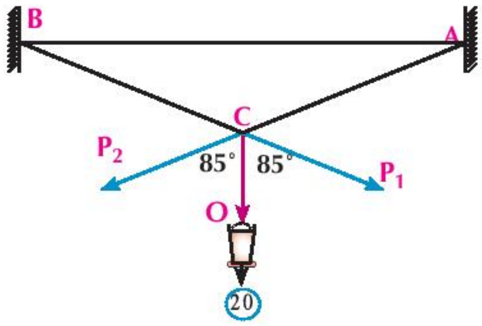
1. Décomposez une force d'intensité 36 Newton en deux composantes formant avec cette force deux angles de mesures 30° et 45° de sorte que les deux forces soient de part et d'autre par rapport à la force.

Exemple

Applications de la vie quotidienne

2. Une lampe de poids 20 Newton est suspendue par deux fils métalliques $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ inclinés sur l'horizontale de deux angles de mesure égale à 5° chacun.

   ➢ Décomposez le poids de la lampe dans les deux directions $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ Arrondissez le résultat à 1 Newton près.



Solution

On représente la force de poids (20 Newton) par un vecteur agissant verticalement vers le bas. Son point d'origine est C. On décompose le vecteur poids dans les directions des deux fils métalliques comme suit:

$\frac{P_1}{\sin 85} = \frac{P_2}{\sin 85} = \frac{20}{\sin 170}$ **donc:**

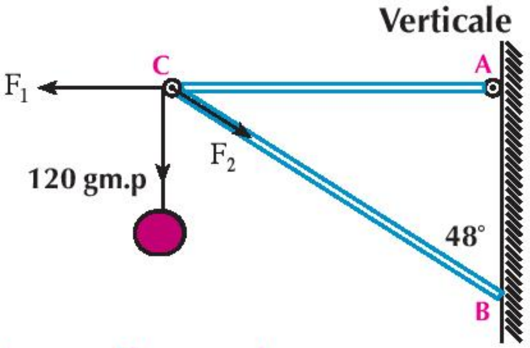
$P_1 = P_2 = 20 \times \frac{\sin 85}{\sin 170}$ d'où:

$P_1 = P_2 = 114,73713 \simeq 115$ Newton.

Réflexion critique: Que se passe-t-il pour les intensités des deux composantes du poids dans la direction des deux fils métalliques si la mesure de son angle avec l'horizontale est inferieure à 5° ? Que peut-on prévoir de l'intensité de la composante du poids si le fils métallique devient horizontal ? Expliquez la réponse.

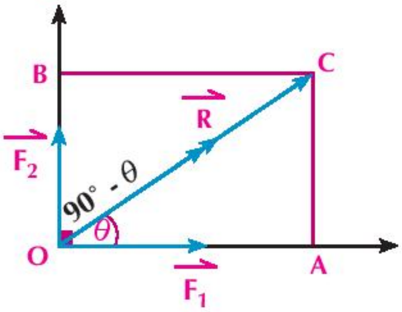
Essayez de résoudre

2. **Dans la figure ci-contre:**
   Décomposez la force verticale d'intensité 120 kg.p en deux composantes dont l'une est dans la direction horizontale et l'autre dans une direction qui fait un angle de mesure 48° avec la droite d'action de la forc.



Décomposition d'une force en deux directions orthogonales

Si une force $\overrightarrow{R}$ est appliquée en un point matériel (O) comme le montre la figure ci-contre et si ces deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont telles que $\overrightarrow{F_1}$ fait un angle de mesure θ avec $\overrightarrow{R}$, alors le parallélogramme ACBO, devient dans ce cas un rectangle. En appliquant la loi de sinus au triangle OAC, on obtient:



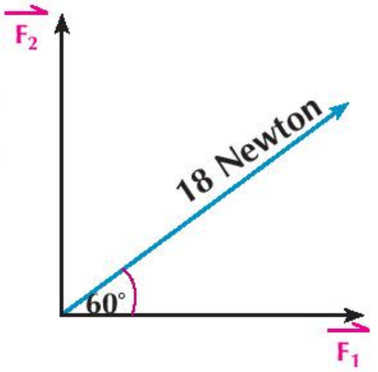
➢ $\dfrac{F_1}{\sin(90 - \theta)} = \dfrac{F_2}{\sin \theta} = \dfrac{R}{\sin 90}$ **D'où** $\dfrac{F_1}{\cos \theta} = \dfrac{F_2}{\sin \theta} = R$

De ce qui précède, on déduit que:

➢ F_1 (l'intensité de la composante dans une direction donnée) = $R \cos \theta$

➢ F_2 (l'intensité de la composante dans la direction orthogonale à la direction donnée) = $R \sin \theta$

Exemple



(3) Décomposez la force d'intensité 18 Newton en deux directions orthogonales dont l'une fait un angle de mesure 60° avec la force.

Solution

$F_1 = 18 \cos 60° = 18 \times \frac{1}{2} = 9$ Newton

$F_2 = 18 \sin 60 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ Newton.

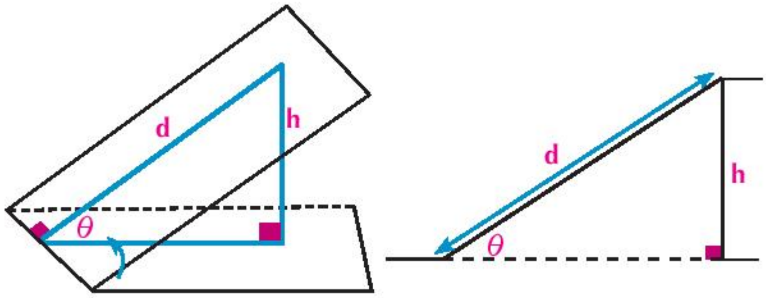
Essayez de résoudre

(3) Décomposez la force d'intensité $6\sqrt{2}$ agissant dans la direction Nord-Est en deux composantes dont l'une est dans la direction de l'Est et l'autre dans la direction du Nord.

Plan incliné

Un plan incliné est une surface qui fait un angle de mesure , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ donnée avec la verticale comme le montre la figure.

La ligne de la plus grande pente du plan est la droite illustrée dans les figures par la couleur bleue, Si on désigne la longueur de la ligne de la plus grande pente par la distance (d), la hauteur de la surface oblique par la distance **h**, et l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontale par θ alors $\sin \theta = \frac{h}{d}$.



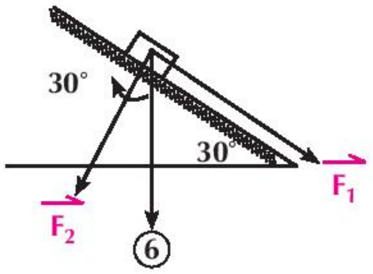
Pour lever un corps de poids (**P**), on utilise une force parallèle à la surface d'intensité (**F**) La surface oblique est utilisée pour diminuer l'effort nécessaire pour lever les corps car (**F**) est toujours inferieure au poids du corps comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple

(4) Un corps de poids 6 Newton est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 30° avec l'horizontale. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est orthogonale.

Solution

La Figure ci-contre montre la force du poids d'intensité 6 Newton agissant verticalement vers le bas, la composante du poids $\overrightarrow{F_1}$ agissant dans la direction de la ligne de plus grande pente vers le bas et l'autre composant $\overrightarrow{F_2}$ agissant dans la direction orthogonale au plan, vers le bas.



la composante du poids dans la direction de la ligne de plus grande pente du plan F_1

où $F_1 = 6 \sin 30 = 3$ Newton ,

$= 6 \text{ Sin } 30° = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ Newton

la composante dans la direction orthogonale ($\overrightarrow{F_2}$)

où : $F_2 = 6 \text{ Cos } E$

$= 6 \text{ Cos } 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ Newton

Expression orale :

Les deux composantes de la force F sont-elles inferieur de -l'intensité de la force même ? Expliquer votre réponse.

Essayez de résoudre

5 Un corps rigide d'intensité de poids 36 Newton est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 60° avec l'horizontale. Trouvez les deux composantes du poids dans une direction parallèle à la ligne de la plus grande pente du poids vers le bas et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

> **Enrichissez vos connaissances**
>
> **Centre de gravité d'un corps rigide**
>
> **C'est le point par lequel passe toujours la ligne verticale passant par le point d'accrochage lorsque le corps est accroché par n'importe quel point qui lui appartient.**
>
> **(1) Par exemple : Le centre de gravité d'une boule régulière et homogène est le centre de la boule.**
>
> **(2) Le centre de gravité d'une bare homogéne est son milieu.**

Exercices (1 - 2)

Complétez ce qui suit:

1 Une force d'intensité 6 Newton agissant dans la direction du Nord a décompose en deux composantes orthogonales. Alors la composante de cette force dans la direction de l'Est est égale à .... Newton.

2 on décompose une force d'intensité $4\sqrt{2}$ Newton agissant dans la direction de l'Est en deux composantes orthogonales. Alors la composante de cette force dans la direction Nord-Est est égale à .... Newton.

3 **Dans la figure (1):**

Si on décompose la force $\overrightarrow{R}$ en deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ faisant deux angles de mesures 30° et 45° de part et d'autre par rapport à la force et si $\|\overrightarrow{R}\| = 12$ Newton,

alors: $F_1 =$ .... Newton et $F_2 =$ .... Newton.

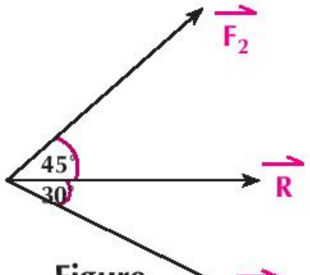


Figure (1)

4 **Dans la figure (2):**

Si on décompose la force $\overrightarrow{R}$ en deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ faisant deux angles de mesures 45° et 90° de part et d'autre par rapport à la force et si $\|\overrightarrow{R}\| = 18$ Newton, alors : $F_1 =$ .... Newton et $F_2 =$ .... Newton

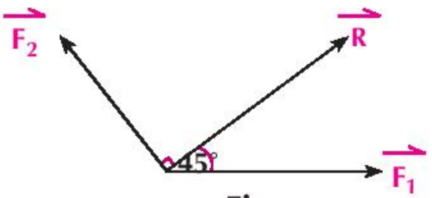


Figure (2)

5 Dans la figure (3):

On décompose la force $\overrightarrow{F}$ en deux composantes orthogonales $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ Si le vecteur force est une bissectrice de l'angle formé par les directions de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ et si $\|\overrightarrow{F}\| = 6\sqrt{2}$ kgp.

alors: $\|\overrightarrow{F_1}\|$ = ... kgp

$\|\overrightarrow{F_2}\|$ = ... kgp

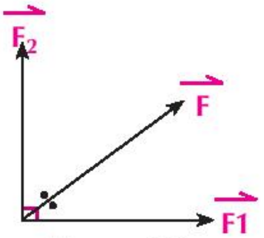


Figure (3)

6 Dans la figure (4):

Une force d'intensité $12\sqrt{2}$ Newton agit dans la direction 30° Nord-ouest.

- La composante de la force dans la direction de l'Ouest = ... Newton.
- La composante de la force dans la direction du Nord = ... Newton.

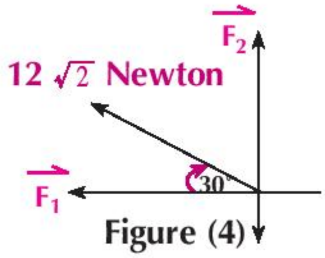


Figure (4)

7 Une force d'intensité 600 kgp agit en un point matériel. Trouvez ses deux composantes dans les deux directions faisant avec elles deux angles de mesures 30° et 45°.

8 Une force d'intensité 120 Newton agit dans la direction Nord-est. Trouvez ses deux composantes dans la direction de l'Est et dans la direction du Nord.

9 Décomposer une force horizontale d'intensité 160 kgp dans deux directions orthogonales l'une faisant un angle de mesure 30° vers le haut.

10 Une force d'intensité 18 Newton agit dans la direction du Sud. Trouvez ses deux composantes dans la direction 60° Est-sud et 30° Ouest-sud.

11 Un corps rigide de poids 42 Newton est posé sur un plan incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 60°. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la ligne de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

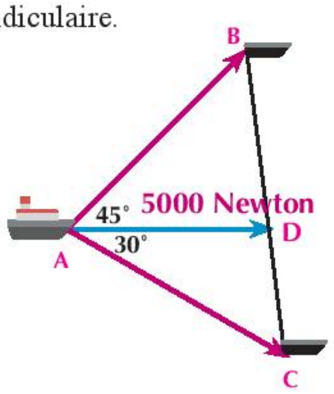
Réflexion créative :

12 On pose un corps rigide de poids 390 kgp sur un plan incliné de longueur 130 cm et de hauteur 50 cm. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la ligne de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

En lien avec navigation maritime

13 On veut tirer un cuirassé par deux locomotives B et C attachés par deux fils qui sont fixés par un crochet en un point A du cuirassé et la mesure de l'angle entre les deux fils est 75°.

Si la résultante des forces pour tirer le cuirassé est 5000 N et agit dans la direction de $\overrightarrow{AD}$ et l'un de deux fils fait un angle de 45° avec $\overrightarrow{AD}$. Trouvez la tension dans chacun de deux fils.



Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes

1 - 3

Allez apprendre

- Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes géométriquement.
- Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes graphiquement.

Vocabulaires de base

- Résultante
- Composante algébrique
- Vecteur unitaire

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà étudié la résultante de deux forces appliquées sur un corps rigide en un point. Cette résultante est représentée géométriquement par la diagonale d'un parallélogramme dont les deux forces représentent deux côtés consécutifs. Pout-on trouver la résultante de plusieurs forces coplanaires, concourantes géométriquement ?

A apprendre

Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes géométriquement :

un système de forces ($\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, ... , $\overrightarrow{F_n}$) appliquées en un point matériel comme le montrela figure (1) Nous pouvons représenter ces forces par un polygone fermé en utilisant une échelle convenable, en traçant le vecteur $\overrightarrow{OA}$ représentant $\overrightarrow{F_1}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représentant $\overrightarrow{F_2}$ puis le vecteur $\overrightarrow{BC}$ représentant $\overrightarrow{F_3}$ etc. jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{F_n}$ en traçant $\overrightarrow{DE}$. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ agissant dans l'ordre cyclique inverse représente la résultante des forces données telles que:

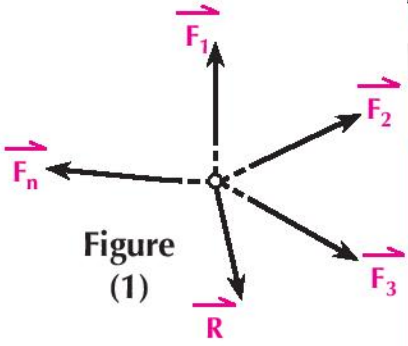


Figure (1)

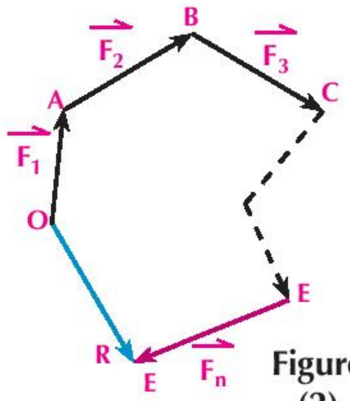


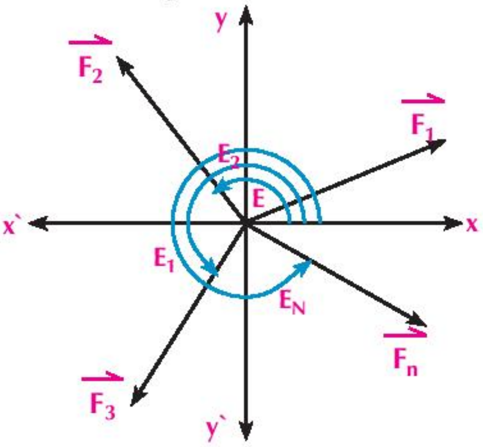
Figure (2)

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots + \overrightarrow{F_n}$$

Ce polygone est appelé le polygone de forces. Il est facile d'observer que la formation du polygone des forces n'est qu'une application de la règle du triangle des forces plusieurs fois consécutives.

Résultante de plusieurs forces coplanaires, concourantes analytiquement:

Soient des forces coplanaires $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$,..... , $\overrightarrow{F_n}$ agissent en un point dans un repère orthogonal et formant des angles polaires de mesures θ_1 , θ_2 , θ_3 , ... , θ_n Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs unitaires dans les directions $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ alors : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + ... + \overrightarrow{F_n}$
En décomposant chaque force dans les directions orthogonales $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ on a :



$$\overrightarrow{R} = (F_1 \cos\theta_1 \overrightarrow{i} , F_1 \cos\theta_1 \overrightarrow{j})$$
$$+ (F_2 \cos\theta_2 \overrightarrow{i} , F_2 \cos\theta_2 \overrightarrow{j})$$
$$+ .... + (F_n \cos\theta_n \overrightarrow{i} , F_n \sin\theta_n \overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{R} = (F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos {}_2\theta + ... + F_n \cos\theta_n) \overrightarrow{i}$$
$$+ (F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin {}_2\theta + ... + F_n \sin\theta_n) \overrightarrow{Y}$$

$$\overrightarrow{R} = (\sum_{r=1}^{n} F_r \cos_r\theta) \overrightarrow{i} + (\sum_{r=1}^{n} F_r \sin {}_r\theta) \overrightarrow{j}$$

La quantité: $\sum_{r=1}^{r=1} F_r \cos\theta_r$ est appelée la somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{ox}$ elle est notée X.

La quantité: $\sum_{r=1}^{n} F_r \sin\theta_r$ est appelée la somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{oy}$ elle est notée Y.

alors $\overrightarrow{R} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j}$

Dans ce cas, l'intensité de la résultante est R et θ est la mesure de son angle polaire sont telles que

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

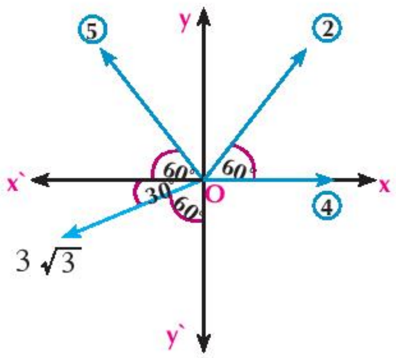
> **Enrichissezvos connaissances**
>
> **Le symbole Σ est appelé le symbole de la somme et l'expression $\sum_{r=1}^{n}$ désigne la somme de n éléments à partir du premier élément.**

Exemple

1 Soient 4 forces coplanaires agissant en un point matériel. La première force est d'intensité 4 Newton agissant dans la direction Est, la seconde force est d'intensité 2 Newton, agissant dans la direction 60° Nord-Est, la troisième force est d'intensité 5 Newton, agissant dans la direction 60° Nord-ouest et la quatrième force est d'intensité $3\sqrt{3}$ Newton, agissant dans la direction 60° Ouest-Sud. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

Solution

Les forces d'intensité 4; 2; 5; $3\sqrt{3}$ Newton dont les angles polaires mesurent 0°, 60°, 120° et 210° respectivement pour trouver la somme algébrique des composantes de ces forces dans la direction $\vec{i}$ et $\vec{j}$



$x = 4\cos 0° + 2\cos 60° + 5\cos 120° + 3\sqrt{3}\cos 210°$

$= 4 + 2 \times \frac{1}{2} - 5 \times \frac{1}{2} - 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 1 - \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$

$y = 4\sin 0° + 2\sin 60° + 5\sin 120° + 3\sqrt{3}\sin 210°$

$= 0 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$

$= \sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

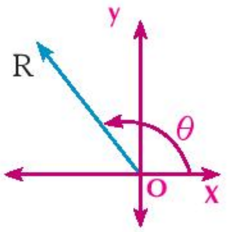
$\therefore \vec{R} = -2\,\vec{i} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}$ $\quad \therefore R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12}$

$= \sqrt{16} = 4$ newton

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

$\because x > 0,\ y < 0$ $\qquad \therefore \theta = 120°$

Donc l'intensité la résultante des forces données est égale à 4 Newton faisant un angle polaire de mesure 120°



Essayez de résoudre

1) Les forces coplanaires d'intensité 10; 20 ; $30\sqrt{3}$, et 40 Newtons sont appliquées en un point matériel telles que la mesure de l'angle entre les directions des deux premières forces est 60°, celle entre la direction de la seconde et la troisième force mesure 90° et celle entre les directions de la troisième et la quatrième force mesure 150°. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante.

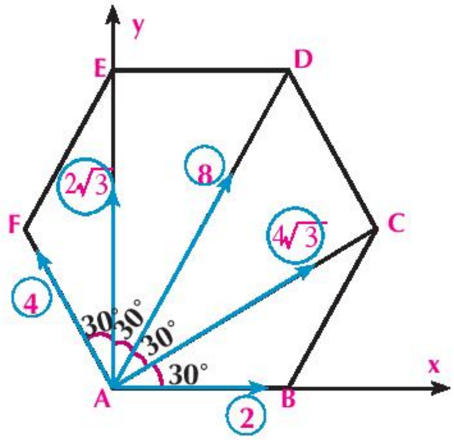
Exemple

5) Soit ABCDEF un hexagone régulier. Les forces d'intensité 2 ; $4\sqrt{3}$; 8 ; $2\sqrt{3}$ et 4 kg p au point A dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ respectivement. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

Solution

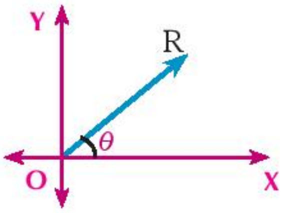
On considère $\overrightarrow{AB}$ la direction de la première force. Donc les angles polaires des forces sont 0°; 30°; 60°; 90° et 120° respectivement.

$\therefore x = 2\cos 0° + 4\sqrt{3}\cos 30° + 8\cos 60° + 2\sqrt{3}\cos 90° + 4\cos 120°$



$$= 2 + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \times 0 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 + 6 + 4 - 2 = 10 \text{ Newton}$$



$$y = 2\sin 0^\circ + 4\sqrt{3}\sin 30^\circ + 8\sin 60^\circ$$

$$+ 2\sqrt{3}\sin 90^\circ + 4\sin 120^\circ$$

$$= 0 + 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ Newton}$$

$$\therefore R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(10)^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20 \text{ Newton}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

$\because x > 0$ et $y < 0$ $\quad \therefore m(\angle\theta) = 60^\circ$

Donc la résultante agit dans la direction de $\overrightarrow{AD}$

Exercices (1 - 3)

Complétez ce qui suit :

1. Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 6\overrightarrow{i}$ alors:
   L'intensité de leur résultante = ... et sa direction est = ...

2. Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = 4\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{R} = 2a\overrightarrow{i} - 3b\overrightarrow{j}$
   Alors : a = ... ، b = ...

3. Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = a\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 4\overrightarrow{i} - b\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{R} = 6\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$
   Alors : a = ... , b = ...

4. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante des forces indiquées dans chacune des figures suivantes:

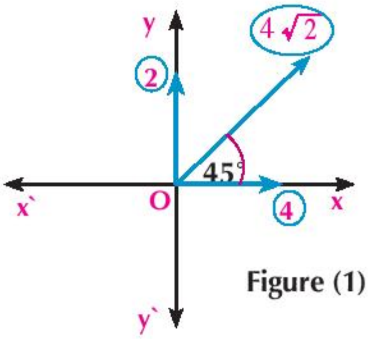


Figure (1)

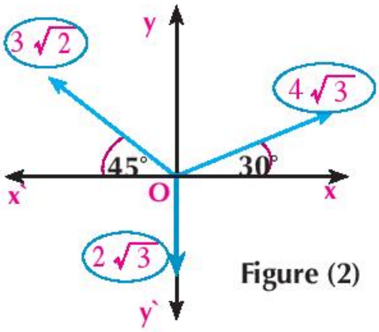


Figure (2)

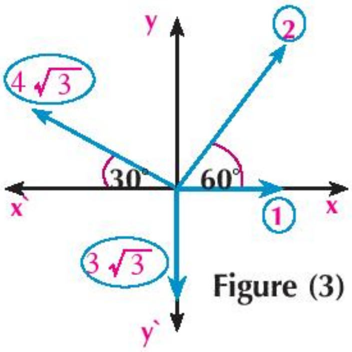
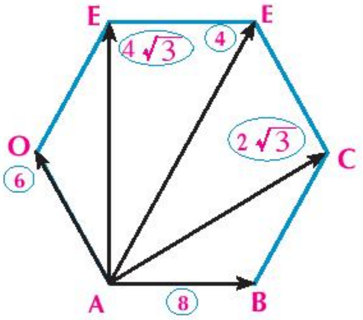
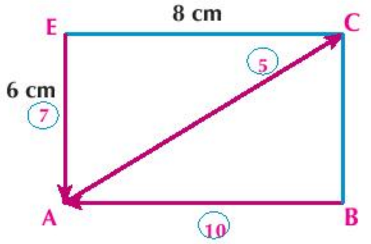


Figure (3)



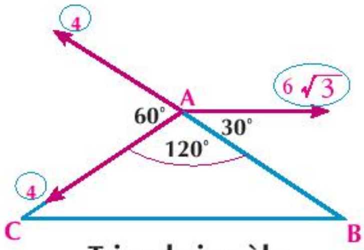
Hexagone régulier

Figure (4)



Rectangle de dimensions 6cm , 8cm

Figure (5)



Triangle isocèle

Figure (6)

5 Des forces d'intensités 3 ; 6 ; $9\sqrt{3}$ et 12 kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre les directions des deux premières forces est 60°, celle entre les directions de la seconde et la troisième force mesure 90° et celle entre les directions de la troisième et de la quatrième force mesure 150°. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

6 Trois forces d'intensité 10 ; 20 et 30 Newton agissent en un point matériel. La première force agit dans la direction de l'Est, la seconde fait un angle de mesure 30° Ouest par rapport au Nord et la troisième fait un angle de mesure 60° Sud par rapport à l'Ouest. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

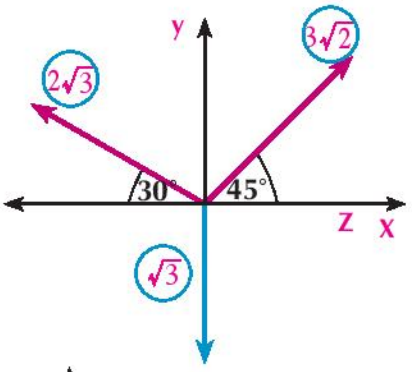
7 Quatre forces d'intensités 10 ; 20 ; $30\sqrt{3}$; et 40 kgp agissent en un point matériel. La première agit dans la direction de l'Est, la seconde agit dans la direction 60° Nord rapport à l'Est, la troisième agit dans la direction 30° Nord par rapport à l'Ouest et la quatrième agit dans la direction 60° Sud par rapport à l'Est. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

8 Soit ABC un triangle équilatéral. M est le point d'intersection de ses médianes. Des forces d'intensités 15 ; 20 et 25 Newton agissent au point M dans les directions $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA}$. respectivement. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

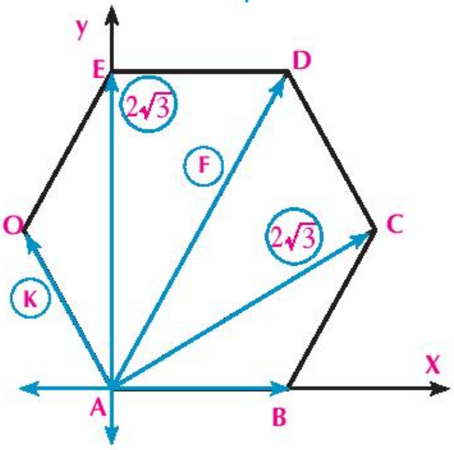
9 Soit ABCD un carré de longueur de côté 12 cm tel que , E ∈ $\overline{BC}$ et BE = 5cm. Des forces d'intensités 2 ; 13 ; $4\sqrt{2}$; 9 kgp agissent dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AD}$ respectivement. Trouvez l'intensité de la résultante de ces forces.

(10) Si $\overrightarrow{F_1} = 5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = a\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = -14\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ trois forces coplanaires, concourantes et si la résultante $\overleftarrow{R} = (10\sqrt{2}\ ;\ 135°)$.Trouvez la valeur de a et b.

(11) **Dans la figure ci-contre**:
Si l'intensité de la résultante des forces est égale à $3\sqrt{2}$ Newton. ,Trouve l'intensité de F et la mesure de l'angle entre la droite d'action de la résultante et la droite d'action de F



(12) **Dans la figure ci-contre**:
si la résultante est égale à 20 kgp et agit dans la direction $\overrightarrow{AD}$ trouve les valeurs de F et K.



Équilibre d'une particule sous l'effet de plusieurs forces coplanaires, concourantes

Si la position d'un corps rigide n'est pas changé sous l'effet de deux forces (ou plus), on dit que les deux forces (ou les forces) sont en équilibre et le corps est en équilibre. La situation la plus simple d'équilibre ce qui est d'un corps rigide sous l'effet de deux forces.

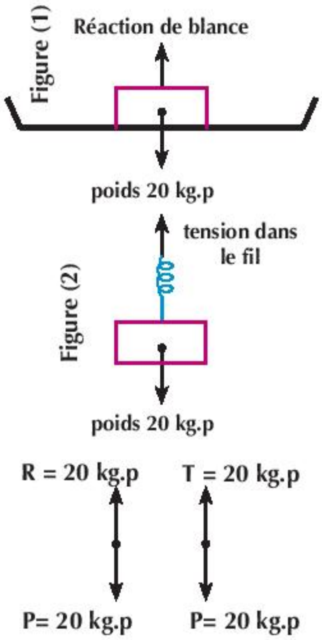
Équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces

Travail coopératif

1- On pose un corps de poids 20 kgp sur le plateau horizontal et lisse d'une balance puis observez la lecture de la balance comme dans la figure (1).

2- Demandez à votre camarade d'attacher le même corps à un fil léger et lisse, et d'attacher à l'autre extrémité du fil par un dynamomètre et d'observer la lecture du dynamomètre dans l'état de repos.

3- Comparez les résultats des deux expériences. Que remarquez-vous?



On remarque que:

➢ L'intensité de la réaction dans la première expérience et l'intensité de la tension dans la deuxième expérience sont égales à 20 kgp chacune, ce qui est égal au poids du corps

Apprendre

Condition d'équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces

Un corps rigide est en équilibre sous l'effet de deux forces si les deux forces sont :

1- de même intensité.

2- de sens contraires

3- de même ligne d'action

A apprendre

- Equilibre d'un système de forces coplanaires concourantes.
- Equilibre d'un corps sous l'effet de deux forces.
- Equilibre d'un corps sous l'effet de trois forces coplanaires concourantes.
- Principe du triangle de forces.
- Principe de Lamé
- Théorème des trois forces

Vcabulaire de base

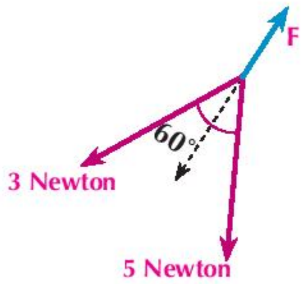
- PRINCIPE DU TRIANGLE DE FORCES
- PRINCIPE DE LAMÉ
- POLYGONE DES FORCES

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Exemple

1) Une force d'intensité F est en équilibre avec deux forces d'intensités 5 et 3 Newton. Si l'angle entre les deux droites d'action des deux dernières forces mesure 60°, Trouvez la valeur de F



Solution

On calcule la résultante des deux forces d'intensité 5 et 3 Newton d'après la formule:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\theta}$ $\quad \therefore R = \sqrt{25 + 9 + 2 \times 5 \times 3 \cos 60^\circ}$

$\therefore R = \sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7$ Newton

$\because$ la force F est la résultante des deux forces d'intensité 5 et 3 Newton sont en équilibre

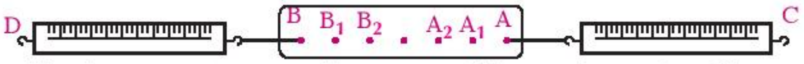
$\therefore F = 7$ Newton

Essayez de résoudre

1) Si la force d'intensité F est en équilibre avec les deux forces orthogonales d'intensité 5 et 12 Newton, trouvez la valeur de F.

Translation du point d'application d'une force à un autre point sur sa ligne d'action

Activité

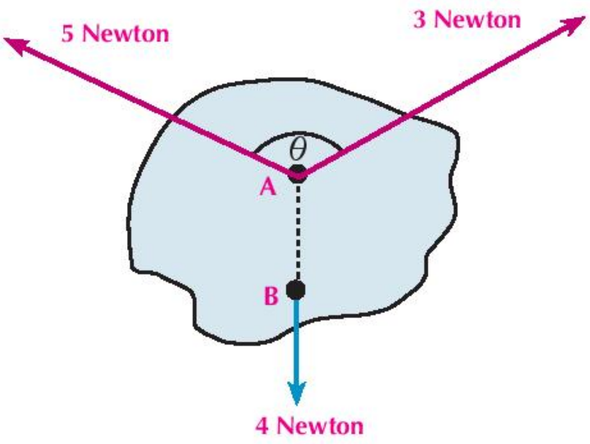


1) Préparez les outils suivants: Un dynamomètre, un disque métallique mince, des fils, un niveau à bulle, une règle.
2) Mets une table horizontalement en utilisant le niveau à bulle.
3) Attachez le disque par deux fils de deux trous A et B et les autres extrémités des fils par dynamomètres.
4) Fixez le dynamomètre en un point C de la table et tirez l'autre et le fixez en un point D de la table pour que les fils soient tendus comme dans la figure.
5) Déterminez la tension et inscrivez -la.
6) Changez la position du point A en A_1, A_2, A_3 … etc. et de même la position du point B en B_1, B_2, B_3 … etc. Observez l'écriture du dynamomètre dans chaque cas et inscrivez - les. Que remarquez - vous ? … on observe dans le cas d'équilibre, les écritures sont égales?

De l'activité précédente, on déduit que:

Si un corps est en équilibre sous l'effet de deux forces, alors on peut transmettre le point d'application de chacune de deux force à un autre point sur la ligne d'action de la force sans changer l'état du corps.

Exemple



1. Les forces 3 ; 4 ; 5 Newton sont en équilibres comme dans la figure ci-contre: Trouvez la mesure de l'angle de deux forces 3 et 5 Newton.

Solution

∵ le système des forces est en équilibre

∴ la résultante des forces 3 et 5 Newton est en équilibre avec la force 4 Newton

Posons θ la mesure de l'angle de deux forces 3 et 5 Newton, alors:

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\theta$

Par substitution : $R = 4$. $F_1 = 3$. $F_2 = 5$

$16 = 9 + 25 + 2 \times 3 \times 5 \cos\theta$ $\qquad 30 \cos\theta = -18$ $\qquad$ Alors $\cos\theta = \frac{-3}{5}$

$\therefore m(\angle\theta) = 180° - 53° \, 7' \, 49'' = 126° \, 52' \, 11''$

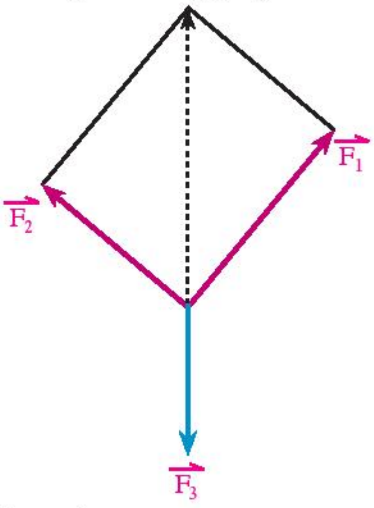
Essayez de résoudre

2. Si les forces 7 ; 8 ; 13 Newton sont en équilibre, trouvez la mesure de l'angle de deux premières forces.

Équilibre d'un corps rigide sous l'effet de trois forces coplanaires, concourantes

Nous avons déjà étudié la condition d'équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces. On va étudier l'équilibre des trois forces coplanaires, concourantes. Ces forces peuvent appliquer à un point matériel ou à un corps de sort qu'elles soient concourantes.

A apprendre



Si on peut représenter trois forces coplanaires, concourantes par les côtés d'un triangle, prises dans un ordre cyclique, alors ces forces sont en équilibre.

Dans la figure ci-contre: Pour que les trois forces soient en équilibre, il faut que les intensités des forces soient des valeurs possibles d'être longueurs des côtés d'un triangle.

Expression orale

Lequel des systèmes des forces suivants qui peut être en équilibre ? vérifiez votre réponse. (les forces de chaque système ont des sens différents)

a) 3 ; 5 ; 9 Newton $\qquad$ b) 3 ; 5 ; 7 Newton $\qquad$ c) 4 ; 10 ; 6 Newton

Principe du triangle des forces

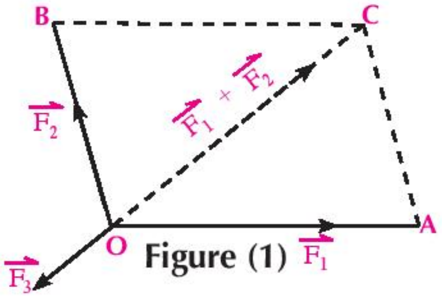


Figure (1)

La figure (1) représente des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ agissant sur un corps rigide dont les directions sont $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$.

La résultante de ces deux forces est ($\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$) agissant dans la direction de la diagonale $\overline{OC}$ dans le parallélogramme OACB.

$\overrightarrow{F_3}$ est égale à ($\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$) et elles sont de sens contraires

Donc: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{0}$ $\quad\therefore$ Les trois forces $\overrightarrow{F_1}$ ، $\overrightarrow{F_2}$ □□ $\overrightarrow{F_3}$ sont en équilibre.

Vérifiez votre compréhension :

Démontrez que le système des forces Donc $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ sont en équilibre, sachant que:

$\overrightarrow{F_1}=2\,\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{i}+3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3}=-3\,\overrightarrow{i}-2\,\overrightarrow{j}$

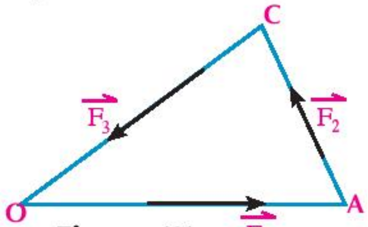


Figure (2)

La figure (2) représente le triangle des forces pour le système des forces $\triangle$**ABC** represents triangle of the forces $\overrightarrow{F_1}$ ، $\overrightarrow{F_2}$ □□ $\overrightarrow{F_3}$ qui sont en équilibre, Puisque les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux intensités des forces correspondantes.

Donc: $\dfrac{F_1}{OA}=\dfrac{F_2}{AC}=\dfrac{F_3}{CO}$

Alors : : Si trois forces concourantes sont équilibre, et on trace un triangle dont les côtés sont parallèles aux droites d'action des forces, alors les longueurs des côtés sont proportionnelles aux intensités des forces.

Réfléchir : Utilisez la loi des sinus pour montrer le principe du triangle des forces.

Exemple

Un corps de poids d'intensité 12 Newton est suspendu par l'une des extrémités d'un fil léger de longueur 130 cm. L'autre extrémité du fil est fixée en un point sur un mur vertical. Le corps est attiré par une force horizontale. Il est en équilibre lorsqu'il est à une distance de 50 cm du mur. Trouvez l'intensité de la force et de la tension dans le fil.

Solution

Le corps est en équilibre sous l'effet de trois forces:

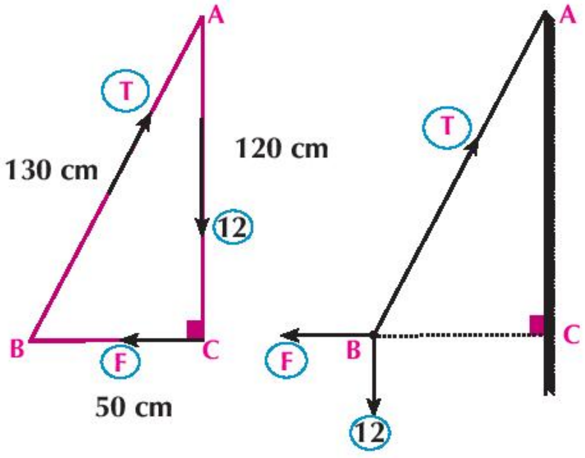
- La force du poids (12 Newton) agissant verticalement vers le bas.
- La force horizontale F.
- La tension du fil T agissant en $\overrightarrow{BA}$

On calcule la longueur $\overline{AC}$ d'après le théorème de Pythagore .

$AC=\sqrt{(130)^2-(50)^2}=120$ cm

BAC est le triangle des forces:

$\dfrac{T}{130}=\dfrac{12}{120}=\dfrac{F}{50}$



T = 13 Newton , F = 5 Newton

Essayez de résoudre

3) Un corps de poids d'intensité 16 Newton est suspendu par l'une des extrémités d'un fil léger. L'autre extrémité du fil est fixée en un point sur un mur vertical. Le corps est attiré par une force dans une direction perpendiculaire au fil. Á l'état d'équilibre, le fil est incliné sur le mur d'un angle de mesure 30° . Trouvez l'intensité de la force et de la tension dans le fil.

Principe de Lamé

Si trois forces F_1 , F_2 , F_3 sont appliqués en in point matériel, comme dans la figure (1), alors On peut les représenter par les côtés d'un triangle prise dans un même ordre cyclique comme dans la figure (2)

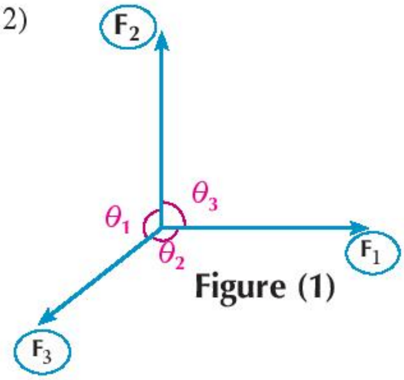


Figure (1)

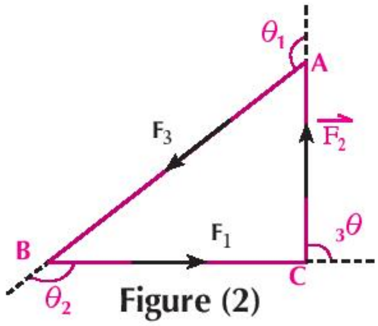


Figure (2)

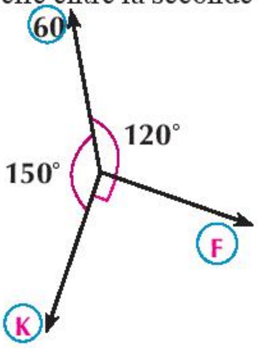
En utilisant la loi de sinus, on trouve que:

$$\frac{BC}{\sin(180° - \theta_1)} = \frac{CA}{\sin(180° - \theta_2)} = \frac{AB}{\sin(180° - \theta_3)} \quad \textbf{d'où} \quad \frac{F_1}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

Donc: l'intensité de chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les droites d'action des deux autres forces lorsque les trois forces concourantes sont en équilibre

Exemple

1) Les trois forces d'intensités 60 ; F et K sont concourantes est en équilibre. Si la mesure de l'angle entre les droites d'actions des deux premières forces est 120° et celle entre la seconde et la troisième est 90°. Trouvez la valeur de F et K.



Solution

Le système est en équilibre sous l'effet des trois forces suivantes: La force d'intensité 60 Newton, la force d'intensité F Newton et la force d'intensité K Newton. En appliquant le principe de Lamé:

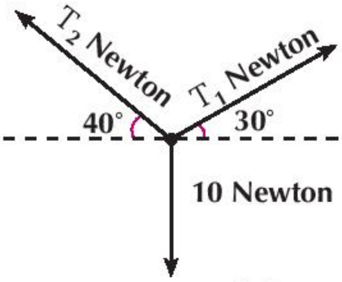
$$\frac{60}{\sin 90°} = \frac{F}{\sin 150°} = \frac{K}{\sin 120°}$$

$$\frac{60}{1} = 2F = \frac{2K}{\sqrt{3}}$$

Donc: $F = 30$ Newton , $K = 30\sqrt{3}$ Newton

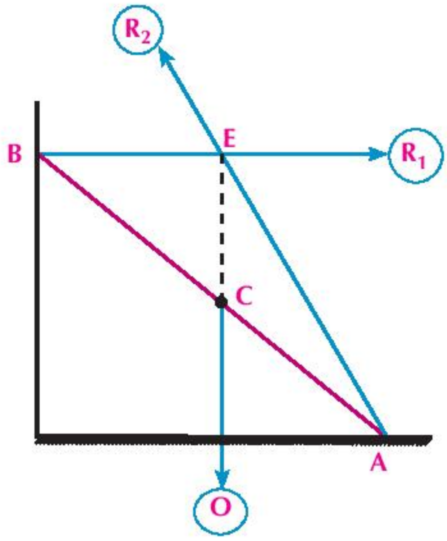
Essayez de résoudre

4) La figure ci-contre montre un corps de poids d'intensité 10 Newton attaché par deux fils inclinés d'angles de mesures 30° et 40° sur l'horizontale. Trouvez T_1 et T_2 à l'état d'équilibre.



Si un corps rigide et en équilibre sous l'effet de trois forces coplanaires non parallèles alors les droites d'action de ces trois forces sont concourantes.

Exemple: Une barre homogène en épaisseur et en densité de poids (P) est posée par l'une de ses extrémités sur un mur vertical lisse et par l'autre extrémité sur un sol horizontal rugueux. Si la barre est en équilibre alors:



- Le poids de la barre P agit en son milieu dans une direction verticale vers le bas.
- La réaction du mur vertical R_1 est perpendiculaire au A mur et agit dans la direction $\overrightarrow{BD}$.
- La réaction du sol horizontal rugueux R_2, est d'une direction indéterminée. Pour déterminer sa direction on trace $\overrightarrow{AD}$ passant par le point D (le point d'intersection des droites d'action de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R_1}$) comme l'indique la figure.

Exemple

(4) Soit une sphère métallique homogène de poids 1,5 kgp et de longueur de rayon 25 cm. On l'attache par le point B de sa surface par un fil de longueur 25 cm. L'autre extrémité A du fil est fixée en un mur vertical. La sphère est en équilibre lorsqu' elle repose sur le mur. Trouvez l'intensité de la tension du fil et l'intensité de la réaction du mur sur la sphère.

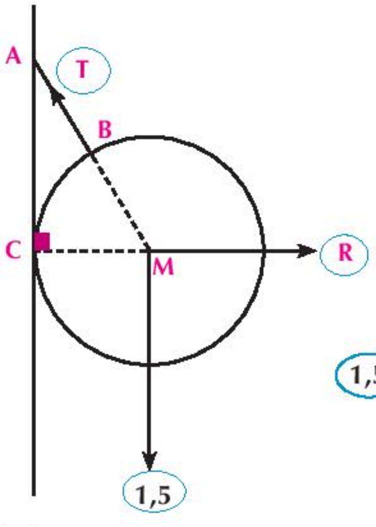
Rappel

Le centre du gravité d'une sphére homogéne est son centre géométrique.

Solution

La sphère est en équilibre sous l'effet de trois forces:

- Le poids de la sphère d'intensité 1,5 kg.p, agissant verticalement vers le bas.
- La réaction du mur R, agissant au point de contact de la sphère avec le mur dans une direction perpendiculaire au Le centre de gravité d'une sphère est situé dans son centre géométrique. mur passant par son centre M.
- La tension du fil T agissant dans la direction . $\overrightarrow{BA}$,

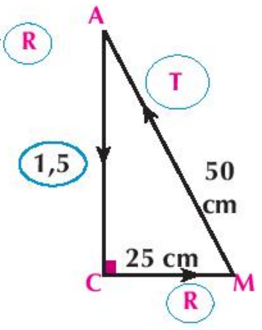


et passant par le centre M, le point d'intersection des droites d'action du poids de la sphère est la réaction du mur MAC est le triangle des forces où:

MA = 25 + 25 = 50 cm.

D'après le théorème de Pythagore

$AC = \sqrt{(50)^2 - (25)^2} = 25\sqrt{3}$ cm



En appliquant le principe des triangles de forces:

$\frac{T}{50} = \frac{1,5}{25\sqrt{3}} = \frac{R}{25}$ D'où $T = \sqrt{3}$ kg.p , $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ kg.p.

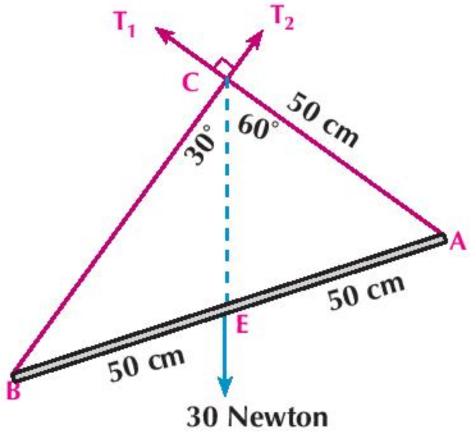
Réfléchissez: Pouvez-vous résoudre l'exercice précédent par d'autres méthodes ? Citez ces méthodes puis résolvez l'exercice par l'une de ces méthodes.

Essayez de résoudre

(5) Une sphère homogène lisse de poids 100 kgp et de longueur de rayon 30 cm est accrochée en un point de sa surface par l'une des extrémités d'un fil léger de longueur 20 cm. L'autre extrémité du fil est fixée en un point d'un mur vertical lisse. Trouvez à l'état d'équilibre l'intensité de la tension du fil et la réaction du mur.

Exemple

(5) Une barre homogène de longueur 100 cm et de poids 30 Newton est suspendue par deux fils fixés à ses extrémités. Ces deux fils sont fixés en un point du plafond de manière à ce qu'ils soient perpendiculaires. La longueur de l'un des deux fils est 50 cm. La barre est alors en équilibre. Trouvez l'intensité de la tension de chaque fil.



Solution

La barre est en équilibre sous l'effet de trois forces:

Son poids d'intensité 30 Newton, agissant verticalement vers le bas et passant par son milieu. Les tensions T_1 et T_2 des deux fils, agissant dans les directions $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ respectivement qui se coupent perpendiculairement au point C

$\because$ $\overline{CD}$ est issu du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse.

$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 50cm$ $\qquad$ $\therefore$ ACD est un triangle équilatéral

$\therefore m(\angle ACD) = 60°$, $m(\angle BCD) = 30°$

En appliquant le principe de Lamé:

$$\frac{T_1}{\sin 150°} = \frac{T_2}{\sin 120°} = \frac{30}{\sin 90°}$$ d'où $T_1 = 15$ Newton, $T_2 = 15\sqrt{3}$ Newton

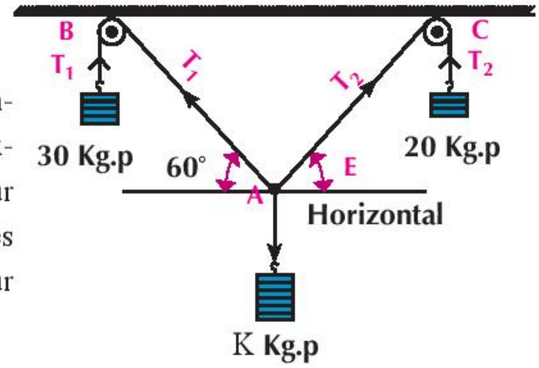
Enrichissez vos connaissances

Si un fil passe autour d'une poulie lisse et si le fil est tendu alors les intensités des tensions aux deux côtés de la poulie sont égales.

Réfléchissez: utilisez d'autres méthodes pour résoudre le problème précédent.

Exemple

(▯) **Dans la figure ci-contre :** un corps de poids d'intensité K est suspendu à l'extrémité d'un fil. L'autre extrémité du fil est attachée à deux fils passant autour de deux poulies lisses en B et C, portant deux masses de poids d'intensité 30 et 20 kg.p. Trouvez la valeur de K et la mesure de l'angle θ à l'état d'équilibre.



Solution

Dans la figure précédente: on suppose que T_1 et T_2 sont les tensions dans les deux fils qui agissent dans les directions $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Les deux poulies sont lisses Donc $T_1 = 30$ kgp et $T_2 = 20$ kgp

Le système est en équilibre sous l'effet de trois forces qui sont:

Le poids du corps d'intensité de poids K kgp et les tensions dans les deux fils d'intensité T_1 et T_2

En appliquant le principe de Lamé:

$$\frac{30}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{20}{\sin(60^\circ + 90^\circ)} = \frac{K}{\sin[180^\circ - (60 + \theta^\circ)]}$$ **en simplifiant**

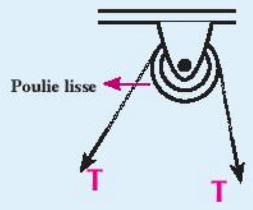
$$\frac{30}{\cos\theta} = 40 = \frac{K}{\sin(60 + \theta^\circ)}$$

Donc $\cos\theta = \frac{3}{4}$ d'où $m(\angle\theta) = 41^\circ\ 24`\ 35``$

$K = 40 \times \sin(41^\circ\ 24`\ 5`` + 60^\circ)$

d'où $K \simeq 39{,}2095$ kgp

Remarque



Les tensions aux deux extrémités du fil sont égales.

Rappel

Sin $(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

Sin $(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

Essayez de résoudre

6 La boule d'une pendule de poids d'intensité 600 kgp est déplacée jusqu'à ce que le fil fasse un angle de mesure 30° avec la verticale sous l'effet d'une force agissant sur la boule dans une direction perpendiculaire au fil. Trouvez l'intensité de la force et l'intensité de la tension au fil.

Équilibre d'un corps sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes

On peut exprimer de la condition d'équilibre du système de forces coplanaires et concourantes, si un corps équilibre sous l'effet d'un système de forces coplanaires et con concourantes; alors la somme algébrique de la composante de forces dans deux sens perpendiculaires est égale á zéro pour qu'un système de forces coplanaires, concourantes soit en équilibre, il faut que :

- La somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{ox} = 0$
- La somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{oy} = 0$

C'est-à-dire $x = 0 ,\ y = 0$

Exemple

▯ Soient $\overrightarrow{F_1} = 5\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -7\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

Démontrez que le système des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ est en équilibre.

Solution

$\because\ \overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

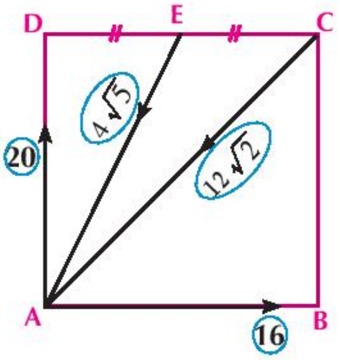
$\therefore\ \overrightarrow{R} = (5 - 7 + 2)\,\overrightarrow{i} + (-3 + 2 + 1)\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ **Donc le système des forces est en équilibre.**

Essayez de résoudre

(7) Si les forces $\overrightarrow{F_1} = 4\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -a\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = -6\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$ sont concourantes et en équilibre, Trouvez la valeur de a et celle de b.

Exemple

(1) **La figure ci-contre** représente les forces d'intensités: 16 ; 20 ; $12\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$ Newton qui agissent au carré ABCD dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{EA}$ respectivement où E et le milieu de $\overline{CD}$. Démontrez que ce système de forces est en équilibre.



Solution

D'après la figure ci-contre, on trouve que les forces d'intensités
16 ; 20 ; $12\sqrt{2}$ et $4\sqrt{5}$ Newton ont pour angles polaires: 0° , 90° ; 225° et (180° + θ)

$\therefore x = 16\cos 0° + 20\cos 90° + 12\sqrt{2}\cos 225° + 4\sqrt{5}\cos(180° + \theta)$

$= 16 + 0 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{5} \times \cos\theta$

$= 16 - 12 - 4\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$y = 16\sin 0° + 20\sin 90° + 12\sqrt{2}\sin 225°$

$+ 4\sqrt{5}\sin(180° + \theta)$

$= 0 + 20 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{5}\sin\theta$

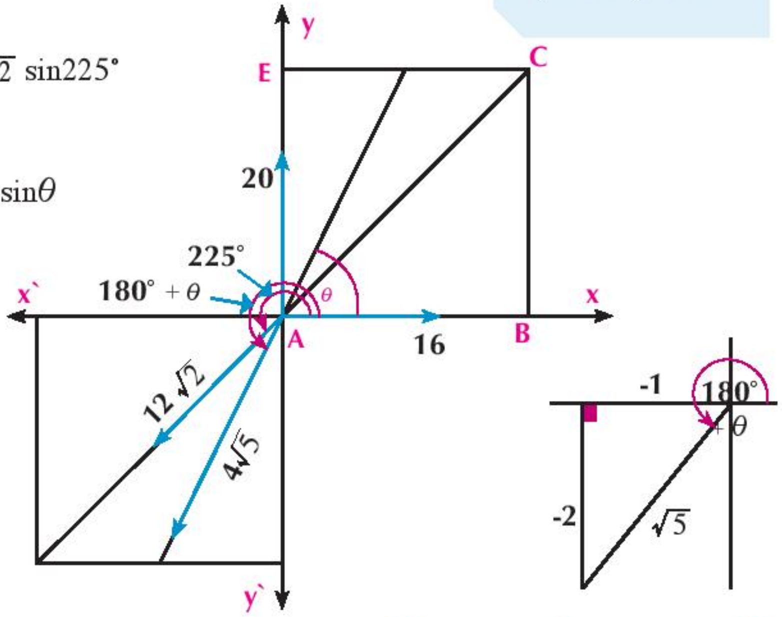
$= 20 - 12 - 4\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$x = 0$, $y = 0$

$\therefore$Le système est en équilibre.

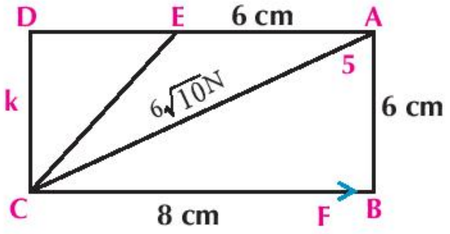
Remarque

$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$



Essayez de résoudre

(8) **La figure ci-contre** représente les forces d'intensités F , 5 , K et $6\sqrt{10}$ Newton qui sont en équilibre et qui agissent au rectangle ABDC dans les directions $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{HC}$ telles que AB = 6 cm, BC = 8 cm et AE = 6 cm.
Trouvez la valeur de F et K.



Exercices (1 - 4)

Complétez ce qui suit:

1. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de forces coplanaires, concourantes soit en équilibre et que les forces soient représentées géométriquement par ....

2. La méthode analytique de l'équilibre d'un système de forces coplanaires, concourantes consiste à avoir .... et ....

3. Si les forces $\overrightarrow{F_1} = 4\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -7\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = a\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ sont en équilibre alors a = ... et b = ...

4. Si la force d'intensité F est en équilibre avec deux forces orthogonales d'intensités 3 et 4 Newton, alors F = ...

5. Si on représente trois forces coplanaires et en équilibre prises dans un ordre cyclique par les côtés d'un triangle, alors les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux ....

6. Chacune des figures suivantes représente un système de forces coplanaires, concourantes. Trouvez la valeur de l'inconnue que ce soit l'intensité d'une force ou la mesure d'un angle.

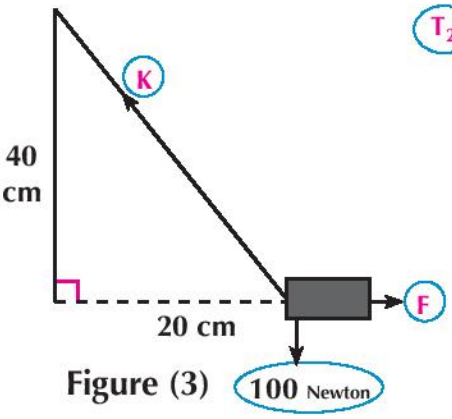


Figure (3)

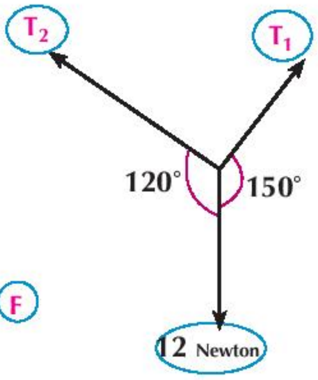


Figure (2)

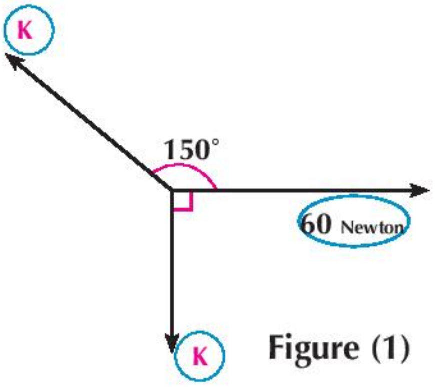


Figure (1)

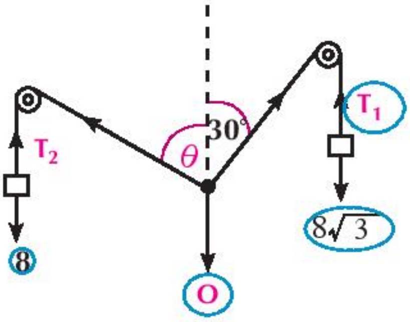


Figure (6)

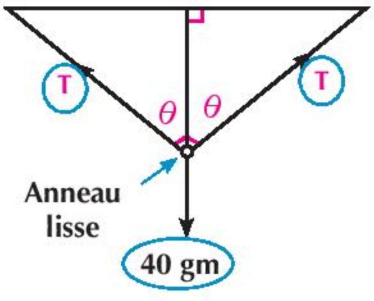


Figure (5)

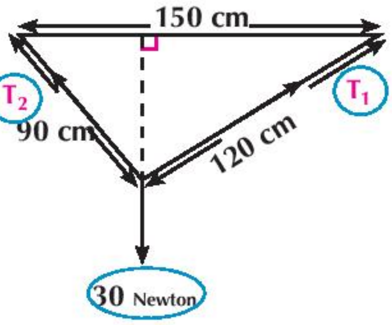


Figure (4)

7. $\overline{AB}$ est une échelle homogène son poids 12 kg.p; posée par son extrémité A sur un mur vertical lisse et l'extrémité B sur une un sol horizontal rugueux, si l'extrémité A se trouve à

4m du sol et l'extrémité B se trouve à 3 m du mur, En cas d'équilibre Trouve la pression au mur et au sol .

8) $\overline{AB}$ est une barre homogène de longueur 60cm et de poids 40 newton est attaché par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical . la barre est maintenue en position horizontale à l'aide d'un fille léger attachée au point B et à l'autre extrémité à un point C du mur au dessus de A d'une distance 60cm . Trouvez l'intensité de la tension au fil et la réaction de la charnière au point A?

9) Une boule homogène repose sur deux barres parallèles situées dans le même plan horizontal . La distance entre les deux barres est égale à la longueur du rayon de la boule Trouvez la pression de la boule sur chaque barre Sachant que son poids est 60 Newton

10) $\overline{AB}$ est une barre régulière de poids P kg. P est attaché par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical . Une force horizontale $\overrightarrow{F}$ agit sur la barre au point B. La barre est en équilibre lorsqu'elle est inclinée sur la verticale d'un angle de mesure 60° . Trouve l'intensité de $\overrightarrow{F}$ et la réaction sur la charnière

11) Un corps de poids 60 kgp est suspendu par l'une des extrémités d'un fil de longueur 28 cm. L'autre extrémité du fil est fixée au plafond d'une chambre. Une force agit sur le corps. Le corps est en équilibre lorsqu'il est à une distance de 14 cm verticalement au-dessous du plafond. Si la force dans l'état d'équilibre est perpendiculaire au fil, trouvez l'intensité de la force et l'intensité de la tension du fil.

12) Un corps de poids 200 kgp est suspendu par deux fils de longueur 60 cm et 80 cm fixés en deux points d'une même ligne horizontale et distant de 100cm. Trouvez l'intensité de la tension dans chaque fil.

13) Un corps de poids 200 gp est suspendu par deux fils légers dont l'un est incliné sur la verticale d'un angle de mesure θ et l'autre est incliné sur la verticale d'un angle de mesure 30°. Si l'intensité de la tension dans le premier fil est égale à 100 gp, trouvez θ et l'intensité de la tension au second fil.

14) Un corps de poids 800 gp est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure θ sur l'horizontale où $\sin \theta = 0{,}6$. Le corps est en équilibre à l'aide d'une force horizontale. Trouvez l'intensité de cette force et la réaction du plan sur le corps.

15) Un corps de poids (P) Newton est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 30°. Le corps est en équilibre à l'aide d'une force d'intensité 36 Newton agissant dans la direction de la plus grande pente du plan vers le haut. Trouvez l'intensité du poids du corps et l'intensité de la réaction du plan.

16) Une sphère métallique homogène lisse de poids 3 Newton repose sur un mur vertical lisse et sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 30° sur le mur vertical. Trouvez l'intensité de la pression sur le mur vertical et sur le plan incliné.

17) Une barre homogène de longueur 50 cm et de poids 20 Newton est suspendue par deux fils fixés à ses extrémités. Ces deux fils sont fixés en un même point du plafond. Si les longueurs des deux fils sont 30 cm et 40 cm respectivement, trouvez l'intensité de la tension aux deux fils.

5 - 1

Équilibre d'un corps sur un plan horizontal rugueux

Allez apprendre

- Surface lisse et Surface rugueux
- Notion du frottement
- Force de frottement statique
- Force de frottement dynamique
- Relation entre le coefficient du frottement et la tangente de l'angle du frottement
- propriétés du frottement
- Équilibre d'un corps sur un plan horizontal rugueux

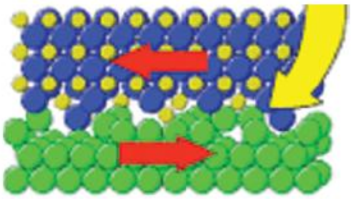
Vcabulaire de base

- Frottement
- Surface lisse
- Surface rugueux
- Réaction normale
- Force de frottement statique
- Force de frottement dynamique
- Force de frottement statique limite
- Réaction résultante
- Angle du frottement
- Plan horizontal rugueux

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

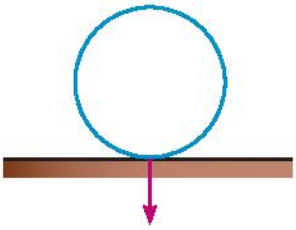
Que est – ce que s'arrive Si le frottement est disparue? On trouve que les voitures, les trains et les moyens du transport ne peuvent pas déplacer car ils dépondent du frottement avec la terre .
Et s'ils sont dans la situation du mouvement, ils ne peuvent pas s'arrêter car les freins dépondent aussi du frottement ave la terre.
De même pour les humains ne peuvent ni déplacer ni arrêter normale. Ils ressemblent le mouvement sur des glaces. Ils ne peuvent pas attraper des choses différentes car ils vont glisser de leurs mains, et les montagnes s'écrouleront et ne seront pas les garder toute couverture de la poussière. Tous les bâtiments ne resteront pas intacts, mais vont s'effondrer. Tout cela à cause du glissement et le manque du frottement. En bref, la vie est impossible sans frottement. Par conséquent, le frottement a des avantages importants. Il rend les roues du véhicule se déplaçant sur la route "et rend les roues de locomotive tiges coincées ferroviaire. Elle permet la conduite du transporteur qui exécute le rouleau sans glissement. Et vous ne pouvez pas marcher sans frottement pour empêcher vos chaussures de patinage au trottoir.



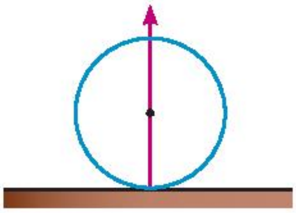
Voilà pourquoi il est difficile de marcher sur la glace, comme la surface lisse ne provoque pas de frottement, et donc ne sont pas autorisés aux chaussures de glisser. Et prouve la poussière sur la surface de la montagne et prouve les bâtiments et les rend construit. En plus de nombreux avantages.

Réaction normale:

Nous avons appris déjà de forces surgissent lorsque deux objets sont en contact appelé la réaction. Si vous mettez une balle sur une table, alors la table agit sur la balle une force appelée la réaction au point du contact. Également la balle agit sur la table une force appelée:
La pression de la balle sur la table. Les deux forces sont de même intensité et de sens opposé. Comme, la troisième loi du mouvement de Newton.



Pression agit sur la table
Figure (1)



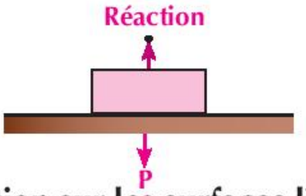
Réaction agit sur la balle
Figure (2)

Surfaces lisses et surface rugueux :

Les savants expliquent le provenu des forces de frottement entre les objets, à la présence de protubérances et de cavités d'objets microscopiques de surface quel que soit le lissé, et le résultat dans le chevauchement de ces saillies et les creux des deux surfaces touchés la force du frottement et par conséquent, nous trouvons la résistance en essayant de déplacer l'un de deux surfaces sur l'autre surface. Le coefficient du frottement est une mesure de la rugosité de surfaces. Si la valeur du coefficient de frottement augmente alors la rugosité et vice versa. Si le coefficient de frottement s'annule, alors les forces de frottement sont complètement éliminées.

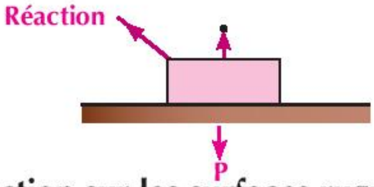
La réaction dépend de la nature des deux corps touchés, et dépend également aux d'autres forces agissant sur le corps. Dans le cas de surfaces lisses, la réaction est perpendiculaire à:

La surface de contact de deux corps touchés. Si les deux corps sont rugueux, la réaction a une composante dans la direction de la surface de contact est appelé frottement statique, a aussi une composante perpendiculaire à la surface de contact est appelée la réaction normale.



Réaction sur les surfaces lisses

Figure (3)



Réaction sur les surfaces rugueux

Figure (4)

Propriétés de force de frottement statique :

(1) La force de frottement statique (F') empêche le corps de bouger, elle est alors dans le sens contraire du mouvement possible du corps.

(2) L'intensité de la force de frottement statique (F') est égale à la force tangentielle qui provoque le mouvement et ne la dépasse jamais.

(3) La force de frottement statique (F') augmente de même que la force tangentielle qui provoque le mouvement. Elles sont toujours de même intensité si le corps est en équilibre.

(4) La force du frottement statique augmente jusqu'à une valeur limité que ne la dépasse pas. En ce moment le corps sera sur le point de se mouvoir et la force est appelée "la force de frottement statique limite" (F_s).

(5) Le rapport de la force de frottement statique limite et la réaction normale est constante. Ce rapport dépond aux natures des deux corps ni aux leurs figures ni aux leurs masses. Ce rapport est appelé le coefficient du frottement statique et noté (μ_s) .

Alors $\mu_s = \frac{F_s}{N}$ où F_s la force du frottement statique limite

On remarque que : le coefficient du frottement statique sauvant $0 \ \mu >_s 1 >$, dans certain cas particulier, il dépasse un entier.

Force du frottement dynamique

Si un corps se meut sur une surface rugueux, il soumit à une force de frottement dynamique (F_D) dans le sens opposé du mouvement est définie par la relation : $F_D = \mu_D N$:

où μ_D est le coefficient du frottement dynamique, R est la réaction normale .

Alors : La force de frottement dynamique est égale aux produit du coefficient du frottement dynamique par la force de réaction normale

d'où on définie la coefficient du frottement dynamique c'est un nappent entre la force de frottement dynamique et la force de la réaction normale .

Alors : $\mu_D = \frac{F_D}{N}$ où F_D est la force du frottement dynamique

Réaction résultante (R')

Dans le cas de la surface rugueux : La réaction résultante est inclinée sur la surface tangentielle où elle est la résultante de la réaction normale et la force de frottement statique .

Défini

La Réaction résultante ($\overrightarrow{R'}$) est la résultante de la réaction normale $\overrightarrow{R}$ et la force de frottement statique $\overrightarrow{F'}$

Angle du frottement

Si λ est la mesure de l'angle compris entre la réaction normale et la réaction résultante, on remarque que la mesure (λ) augmente avec l'augmentation du frottement (sachant que la réaction normale est constante) et cette valeur atteint son maximum lors du frottement limite. Dans se cas l'angle est appelé l'angle du frottement.

Les figures suivantes indiquent les différentes situations

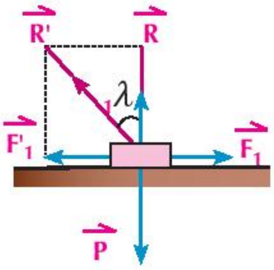


figure (6)

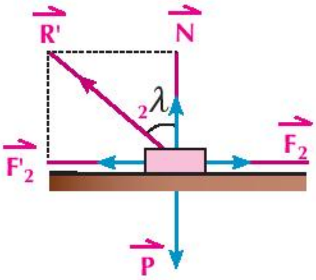


figure (7)

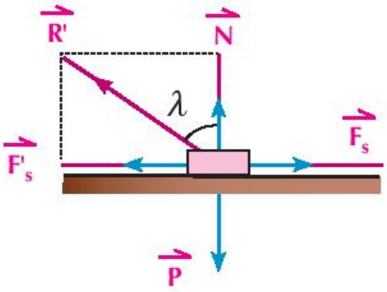


figure (8)

De les figure (6) et (7) on trouve que la réaction résultante $\overrightarrow{R'}$ est la résultante de la réaction normale $\overrightarrow{R}$ et la force du frottement $\overrightarrow{F'}$, d'où $R' = \sqrt{R^2 + F'^2}$

De la figure (3) quand la réaction est limite :

$\therefore\ R' = \sqrt{R^2 + F_s^{\,2}}$ $\quad\because\ F_s = \mu_s R$ $\quad\therefore\ R' = \sqrt{R^2 + R^2\,{}^2\mu_s}$ $\quad\therefore\ R' = R\sqrt{1 + \mu_s^2}$

La relation entre le coefficient du frottement et l'angle du frottement :

Dans le cas du frottement limite figure (8) :

On trouve que : $\text{tg}\,\lambda = \frac{F_s}{R}$ mais $\frac{F_s}{R} = \mu_x$

d'où : $\mu_s = \text{tg}\,\lambda$

Si le frottement est limite, alors le coefficient du frottement est égal à la tangente de l'angle du frottement

Réflexion critique: comparez les mesures de l'angle du frottement statique et le frottement dynamique.

Equilibre d'un corps sur un plan horizontal rugueux

Si un corps de poids P est placé sur un plan horizontal rugueux et une force, d'intensité F incliné sur l'horizontal par un angle de mesure θ, agit sur lui, alors le corps est en équilibre sous l'effet des forces :

1) La force du poids $\overrightarrow{P}$ d'intensité P verticalement vers le bas.

2) La force de la réaction résultante $\overrightarrow{R'}$ d'intensité R'

3) La force $\overrightarrow{F}$ d'intensité F . Comme indique la figure (9).

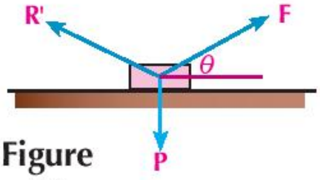


Figure (9)

En décomposant la force $\overrightarrow{F}$ est en deux composantes orthogonaux d'intensités P cos θ ; P sin θ .

On décompose $\overrightarrow{R'}$ en deux composantes orthogonales, l'une est la réaction normale $\overrightarrow{R}$ d'intensité R et l'autre la force du frottement $\overrightarrow{F'}$ d'intensité F'. Comme indique la figure (10)

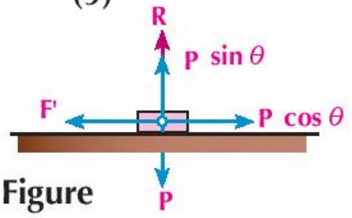


Figure (10)

D'où les deux équations d'équilibre du corps sont : $F' = F\cos\theta$, $R + F\sin\theta = P$

Exemple **la force appliqué au corps**

(1) Karim pousse une boite contient des livres vers la voiture. Si le poids de la boite et des livres est 124 N. et le coefficient du frottement statique de la route avec la boite est 0,45. Par quelle force Karim doit pousser la boite pour qu'elle soit sur le point de se mouvoir?

Solution

Considérons P = 124 N, $\mu_s = 0,45$

D'après les conditions d'équilibre d'un corps sur un plan horizontal

$R = P$ **alors :** R = 124 **(1)**

$F = \mu_s R$ de **(1)** on a : $F = 0,45 \times 124 = 55,8$ N

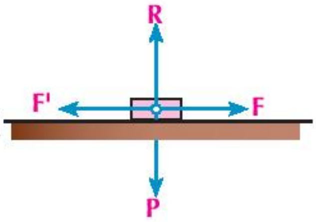


Figure (11)

Essayez de résoudre

(1) Un corps de poids 32 N est posé sur un plan horizontal rugueux. Une force horizontal F agit sur le corps jusqu'à la masse soit sur le point de mouvoir.

- (a) Si P = 8 N, déterminez le coefficient du frottement statique entre la masse et le plan
- (b) Si $\mu_s = 0,4$ déterminez P

Exemple **Force du frottement**

(2) Un corps de 8 N de poids est posé sur une table horizontale. Ce corps est attaché par un fil passant sur une petite poulie lisse fixé au bord de la table, un poids de 1,5 N est suspendu

de l'autre extrémité du fil. Si le corps est en équilibre sur la table, déterminez la force du frottement. Si le coefficient du frottement statique est $\frac{1}{4}$. Le corps est – il sur le point de se mouvoir? Vérifiez votre réponse.

Solution

La force qui provoque le mouvement est la force de la tension dans le fil horizontal. L'intensité de cette force est 1,5 N. La force du frottement est dans le sens opposé de la force de la tension comme indique la figure.

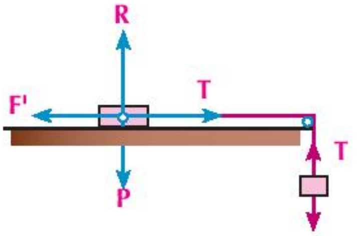


Figure (12)

D'après l'étude de l'équilibre du corps on trouve que :

T = 1,5 N , F' = 1,5 N , R = 8 N

Pour savoir que le corps est sur le point de se mouvoir ou non, on détermine la valeur maximale de la force du frottement statique F'_s

$\because F'_s = \mu_s R$ $\therefore F'_s = \frac{1}{4} \times 8 = 2$ N.

$\therefore$ F' $\mu >_s$ R pour cela le frottement n'est pas limite et le corps n'est pas alors sur le point de se mouvoir.

Essayez de résoudre

2) Un corps de 20 N de poids est posé sur un plan horizontal rugueux. Si le coefficient du frottement statique est $\frac{1}{4}$ Déterminez :

a) l'intensité de la force horizontale nécessaire pour que le corps soit sur le point de se mouvoir.

b) l'intensité de la force inclinée de 30° sur l'horizontal et rend le corps sur le point de se mouvoir.

Exemple

Angle du frottement

3) Un corps de poids 12 kg.p est posé sur un plan horizontal rugueux. Deux forces dans un même plan horizontal d'intensités 4 et 4 kg.p forment un angle de 60°. Elles agissent sur le corps qui devient sur le point de se mouvoir. Déterminez le coefficient du frottement ainsi que la mesure de l'angle du frottement.

Solution

Les forces agissant sur le corps sont :

(1) le poids du corps $\sqrt{12}$ kgp verticalement vers le bas.

(2) La réaction normale R.

(3) Deux forces de même plan que le corps, d'intensités 4 et 4 kgp formant un angle de mesure 60° .

(4) La force du frottement F' qui situé dans le même plan horizontal

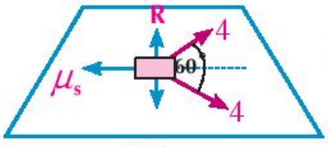


Figure (14)

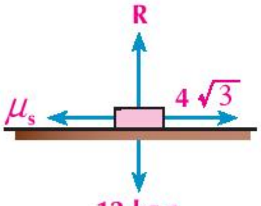


Figure (13)

∵ la somme des mesures algébriques des composantes horizontales des forces dans le sens orthogonal est égale à zéro

∴ $R = \sqrt{12}$ kgp

∴ Les force 4 ; 4 ; F' kgp sont coplanaires et équilibres , alors F' est égale l'intensité de la résultante des deux forces 2 et 3 kgp et dans le sens opposé.

∵ $F'_s = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\, F_2 \cos \propto}$ (formule de la résultante de deux forces concourantes)

∴ $F'_s = \sqrt{16 + 16 + 4 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$ kgp

∵ Le corps est en équilibre ∴ $\mu_s N = 4\sqrt{3}$, $R = 12$

∴ par la division de deux équations : ∴ $\mu_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∵ $\mu_s = \text{tg}\, \lambda$ ∴ $\text{tg}\, \lambda = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ∴ $m(\angle \lambda) = 30°$

Essayez de résoudre

3) Un corps de poids 6N, est posé sur un plan horizontal rugueux. Dans le même plan, deux forces d'intensités 2 et 4 N forment entre elle un angle de mesure 120°. Elles agissent sur le corps qui reste au repos. Montrez que la mesure de l'angle de frottement (λ) entre le corps et le plan n'est pas inférieur à 30°.
Si $\lambda = 45°$, les sens des deux forces sont invariables et la force d'intensité 4 N reste sans changement, déterminez la plus petite intensité de l'autre force pour que le corps soit sur le point de se mouvoir.

Exemple

Démonstration théorique

4) Un corps de poids P Newton est placé sur un plan horizontal rugueux. La mesure de l'angle du frottement est λ , Le corps est tiré par une force inclinée sur l'horizontal d'un angle de mesure θ jusqu' il devient sur le point de se mouvoir. Démontrez que cette force est égale à $= \frac{P \sin \lambda}{\cos(\lambda - \theta)}$, puis déterminez la plus petite force nécessaire pour déplacer le corps et sur quelle condition?

Autre Solution

∵ R' est la réaction résultante de deux forces R et F_s :

∴ Le corps est en équilibre sus l'effet des trois forces : $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R'}$

En appliquant le principe de Lamé :

∴ $\frac{F}{\sin(180° - \lambda)} = \frac{P}{\sin[90° - (\lambda - \theta)]}$

∵ $\frac{F}{\sin \lambda} = \frac{P}{\cos(\lambda - \theta)}$ ∴ $F = \frac{P \sin \lambda}{\cos(\lambda - \theta)}$

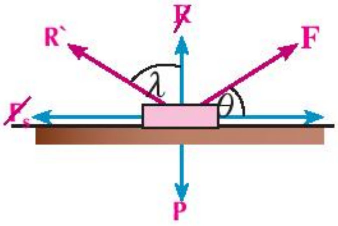


Figure (14)

∵ on veut la plus petite valeur de la force, alors $\cos(\lambda - \theta)$ est la plus grande possible

$\therefore\ \cos(\theta - \lambda) = 1$ $\therefore\ F = P \sin \lambda$ La condition nécessaire est :

$\cos(\lambda - \theta) = \cos 0$ $\therefore\ 0 = \lambda - \theta$ $\therefore\ \lambda = \theta$

$\therefore$ La condition nécessaire est "la mesure de l'angle d'inclinaison est égale à la mesure de l'angle du frottement"

Essayez de résoudre

4) Un corps de poids (P) kg.p est placé sur un plan horizontal rugueux. La mesure de l'angle du frottement est (λ), Le corps est tiré par une force inclinée sur l'horizontal d'un angle de mesure (2λ) vers l'haut, jusqu' il devient sur le point de se mouvoir. Démontrez que l'intensité de cette force est égale à $P \tan \lambda$.

Rappel

$\cos(\lambda - \theta) = \cos\theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda$

$\cos(\lambda + \theta) = \cos\theta \cos \lambda - \sin\theta \sin \lambda$

Exercice 1 - 5

Premièrement : Complétez ce qui suit :

1. La force qui provenue à cause de glissement l'un de deux surface rugueux sur un autre est appelée la force ....
2. La force de frottement est disparue et le coefficient du frottement est égal à zéro sur les surface ....
3. Si la force du frottement statique atteigne sa valeur maximale, alors en ce moment le corps est ....
4. La force du frottement dynamique est égale au produit du coefficient du frottement dynamique par la force ....
5. La résultante de la réaction normale et la force du frottement statique limite est appelée ....
6. La force du frottement statique est plus petite ou égale au produit du coefficient du frottement statique par la force ....
7. Si le coefficient du frottement statique entre une masse de 40 kg et la surface de la terre est égale à 0,45, alors l'intensité de la force horizontale qui agit sur la masse et la rend au point de se mouvoir est égale à ....
8. Si un corps de poids 6 N est placé sur un plan horizontal rugueux, et la force du frottement statique est égale à 4 N, alors le coefficient du frottement statique est égal à ....

Répondez aux questions suivantes

9. Un jaune homme pousse une pierre de 56 N de poids avec une force horizontale de 42 N sur un trottoir. La pierre est alors sur le point de se mouvoir. Déterminer le coefficient du frottement statique entre la pierre et le trottoir.
10. Si un corps de poids 240 kgp est placé sur un plan horizontal rugueux. On le tire par une corde inclinée sur l'horizontal à un angle de 30°. Si le coefficient du frottement statique est 0,3, détermine la tension nécessaire pour que le cops soit sur le point de se mouvoir.
11. un corps de 39 gp de poids est placé sur un plan horizontal rugueux. Deux forces horizontales d'intensités 7 , 8 gp formant un angle de 60° de mesure agissent sur le corps. Le corps est alors sur le point de se mouvoir. Déterminez le coefficient du frottement statique.

6 - 1 Équilibre d'un corps sur un plan incliné rugueux

Allez apprendre

- Conditions d'équilibre d'un corps sur un plan incliné rugueux
- Relation entre la mesure de l'angle du frottement et la mesure de l'angle d'inclinaison du plan à l'horizontal
- Détermination du coefficient de frottement entre deux plans tangente (activité)

Vcabulaire de base

- Plan incliné rugueux
- Réaction normale
- Réaction résultante
- Angle de frottement
- Coefficient de frottement

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

On a déjà étudié l'équilibre d'un corps de poids (P) sur un plan horizontal rugueux sous l'action d'une force (F) inclinée d'un angle θ sur l'horizontal. On sait que le corps dans le cas d'équilibre est soumis sous l'action des forces suivantes:

- Force de poids $\overrightarrow{P}$
- Force $\overrightarrow{F}$
- Force de réaction résultante $\overrightarrow{R'}$

Dans cette leçon, on étudiera l'équilibre d'un corps sur un plan incliné rugueux.
Considérons un corps en équilibre sur un plan rugueux incliné à un angle θ sur l'horizontal.
Un corps en équilibre sur le plan sous l'action de deux forces:

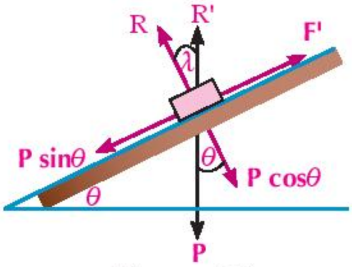


Figure (1)

(1) Force de poids $\overrightarrow{P}$ agit verticalement vers le bas d'intensité (P)

(2) Force de la réaction résultante d'intensité (R')

Des conditions d'équilibre :

Réaction résultante agit verticalement vers le haut.

Alors : $R' = P$ .... (1)

On peut alors déterminer les deux forces, le frottement et la réaction normale comme deux composantes de la réaction résultante dans la direction parallèle au plan et la direction perpendiculaire au plan comme indique la figure (1) .

Force de frottement .

$F' = P \sin \theta$ .... (2)

Cette force agit dans le sens opposé du sens du mouvement possible, c.-à-d. qu'elle est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan vers le haut.

Force de réaction normale .

$R = P \cos \theta$ .... (3)

Relation entre la mesure de l'angle de frottement statique et la mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal.

Si un corps est posé sur un plan rugueux incliné et il était sur le point de se mouvoir, alors la mesure de l'angle de frottement statique est égale à la mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal.

Démonstration :

$\because$ le frottement est limite

$\therefore$ La force de frottement résultante forme avec la direction normale un angle de même mesure que l'angle du frottement statique. Soit sa mesure (λ).

De la figure précédante on trouve que : $\lambda = \theta$

On peut écrire l'équation en fonction du coefficient du frottement comme ce qui suit :

$\text{tg } \mu = \lambda$ ou $\mu = \text{tg } \theta$

par exemple :

Si un corps est posé sur un plan incliné rugueux et était sur le point de se mouvoir sous l'effet de son poids seulement au moment où l'angle d'inclinaison du plan à l'horizontal est 30°, Alors le coefficient du frottement statique $\mu = \text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exemple

1. Un corps de 3 N de poids est posé sur un plan incliné d'un angle de 30° sur l'horizontal dont le coefficient du frottement est $\frac{2}{3}$. Une force de 2 N agit sur le corps suivant la ligne de plus grande pente vers le haut. Si le corps est en équilibre, déterminez la force du frottement puis montrez si le corps est sur le point de se mouvoir ou non?

Solution

On décompose le poids du corps $\vec{P}$ en deux composantes dans le sens du plan et le sens orthogonal.

1) La composante tangentielle au sens de la plus grande pente du plan vers le bas est d'intensité $P \sin \theta = 3 \sin 30° = \frac{3}{2}$ N

2) La composante normale au plan est d'intensité $P \cos \theta = 3 \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ N

Par la comparaison de la composante tangentielle du poids $P \sin \theta = \frac{3}{2}$ N , et la force agissant au corps suivant la ligne de plus grande pente du plan vers le haut = 2 N, on trouve que $F < P \sin \theta$.

Pour cela le corps tends au mouvement vers le haut par conséquent la force du frottement $\vec{F}$ dans le sens opposé c – à – d dans le sens de plus grande pente du plan vers le bas, alors :

$F = F' + P \sin \theta$ $\therefore\ 2 = F' + \frac{3}{2}$ $\therefore F' = \frac{1}{2}$ N

$R = P \cos \theta$ $\therefore\ R = 3 \cos 30°$ $\therefore R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ N

L'intensité du frottement = $\frac{1}{2}$ N agit dans la direction de la plus grande pente du plan vers le bas

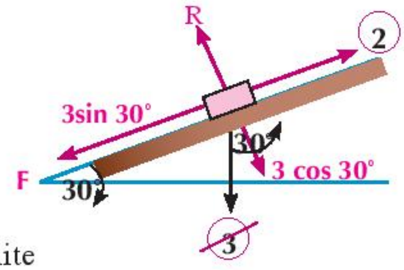


figure (2)

Pour savoir que le corps est sur le point de se mouvoir ou non, on calcule l'intensité de la force du frottement limite $F'_s = \mu_s R = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ N

On trouve que : $F' < F_s$ c – à – d le frottement n'est pas limite

$\therefore$ Le corps n'est pas sur le point de se mouvoir .

Essayez de résoudre

1 Un corps de 2 kgp de poids est posé sur un plan incliné d'un angle de 30° dont le coefficient du frottement est 0,9. Une force de 2,5 N agit sur le corps suivant la ligne de la plus grande pente vers le haut. Si le corps est en équilibre, déterminez la force du frottement en se moment puis montrez si le corps est sur le point de se mouvoir ou non?

Réflexion critique : Si un corps est posé sur un plan incliné à l'horizontal d'un angle de mesure (θ), et l'angle de frottement statique est (λ) – Quelle est la position du corps si:

a $\lambda > \theta$ b $\lambda < \theta$

Exemple

2 Un corps de poids 10 kgp est posé sur un plan incliné rugueux. Une force $\overrightarrow{F}$ agit sur le corps suivant la ligne de plus grande pente vers le haut. Si le corps est sur le point de se mouvoir vers le haut quand F = 6 kgp et sur le point de se mouvoir vers le bas quand F = 4 kgp. Déterminez :

a La mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal .

b le coefficient de frottement statique entre le corps et le plan .

Solution

Quand F = 6 kgp , le corps est sur le point de se mouvoir vers le haut , le frottement statique sera limite et agit vers le bas du plan.

$\therefore R_1 = 10 \cos \theta$, $6 = 10 \sin\theta + \mu_s R_1$ et par élimination de R_1 de deux équations :

$\therefore 10 \sin \theta + 10 \mu_s \cos \theta = 6$ .... **(1)**

Quand F = 4 kgp , le corps est sur le point de se mouvoir vers le bas, le frottement statique sera limite et agit vers le haut du plan .

$\therefore R_2 = 10 \cos \theta + 4$; $\mu_s R_2 = 10 \sin \theta$ Par l'élimination de R_2 dans les deux équations :

$\therefore 10 \mu_s \cos \theta = 10 \sin \theta - 4$ .... **(2)**

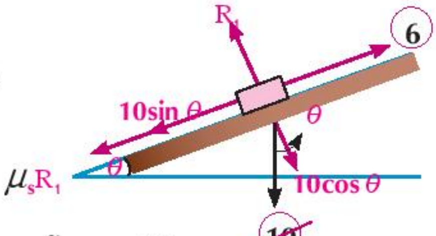


figure (3)

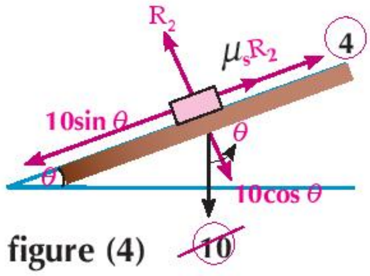


figure (4)

De (1) et (2) :

$\therefore 6 = 10 \sin \theta + 10 \sin \theta - 4$ $\therefore 20 \sin \theta = 10$

$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$ $\therefore m(\angle \theta) = 30°$

Par la substitution dans (2)

$\therefore 10 \mu_s \cos 30° = 10 \sin 30° - 4$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \mu_s = 5 - 4$

$\therefore \mu_s = \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{15}$

Le coefficient du frottement entre le corps et le plan = $\frac{\sqrt{3}}{15}$

Essayez de résoudre

2. Un corps de 30 N de poids est posé sur un plan incliné rugueux. On a remarqué que le corps est sur le point de se glisser quand le plan est incliné d'un angle de 30°, sur l'horizontal. Si on augmente l'inclinaison du plan pour que l'angle d'inclinaison soit 60°, Déterminez l'intensité de :

   a. La plus petite force agissant au corps parallèlement à la ligne de plus grande pente du plan et l'empêche de glisser.

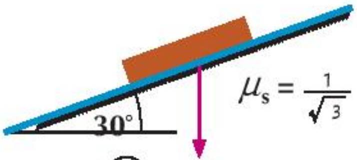
   b. La force agissant au corps parallèlement à la ligne de plus grande pente du plan et le rend sur le point de se mouvoir vers le haut du plan.

Exercice 1 - 6

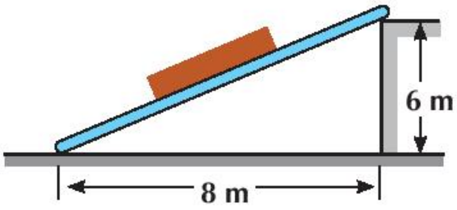
Premièrement : Mettez le signe (✓) ou le signe (✗):

1. Le coefficient du frottement entre deux corps dépend à leurs figures et leurs masses.
2. Le rapport entre l'intensité de la force de frottement statique limite et la réaction normale est appelé le coefficient de frottement.
3. La tangente de l'angle du frottement statique est égale au rapport de la force de frottement limite et la réaction normale
4. Si un corps est posé sur un plan incliné rugueux il est sur le point de glisser, alors le coefficient de frottement statique entre le corps et le plan est égal à la mesure de l'angle d'inclinaison du plan à l'horizontal.
5. Si un corps est posé sur un plan incliné rugueux il est sur le point de glisser, alors la mesure de l'angle de frottement est égal à la mesure de l'angle d'inclinaison du plan à l'horizontal.
6. l'angle de frottement est l'angle compris entre la force de frottement limite et la force de la réaction résultante.

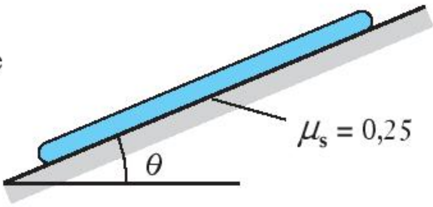
Deuxièmement: Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:



7. **Dans la figure ci –contre :** Si le corps est sur le point de se glisser vers le bas, alors la force de frottement limite est égale à :
   (a) 3 (b) $2\sqrt{3}$
   (c) $3\sqrt{3}$ (d) 9



8. **Dans la figure ci –contre :** Le corps est sur le point de se glisser vers le bas du plan, alors la mesure de l'angle de frottement statique est égale à :
   (a) 36,87° (b) 41,41°
   (c) 48,59° (d) 53,13°



9. **Dans la figure ci –contre :** Le corps est sur le point de se glisser vers le bas du plan, alors m ($\theta\angle$) =
   (a) 14,04° (b) 14,48°
   (c) 75,52° (d) 75,87°

10. Un corps de 38 kgp de poids est sur le point de se mouvoir sous l'effet de son poids. S'il est placé sur un plan rugueux incliné d'un angle dont la tangente est $\frac{1}{4}$, sur l'horizontal. S'il est posé sur un plan horizontal de même rugosité et une force de tension de même plan vertical inclinée à l'horizontal d'un angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$ appliqué sur le corps vers le haut. Déterminez l'intensité de cette force et l'intensité de la réaction normale.

11. Un corps de 400 gp de poids est placé sur un plan incliné d'un angle de 30° à l'horizontal. Le coefficient de frottement entre le corps et le plan est $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Une force d'intensité 50 gp agit sur le corps suivant la ligne de plus grande pente du plan vers le haut. Si le corps est en équilibre, déterminez la force de frottement puis montrez si le corps est sur le point de se mouvoir ou non?

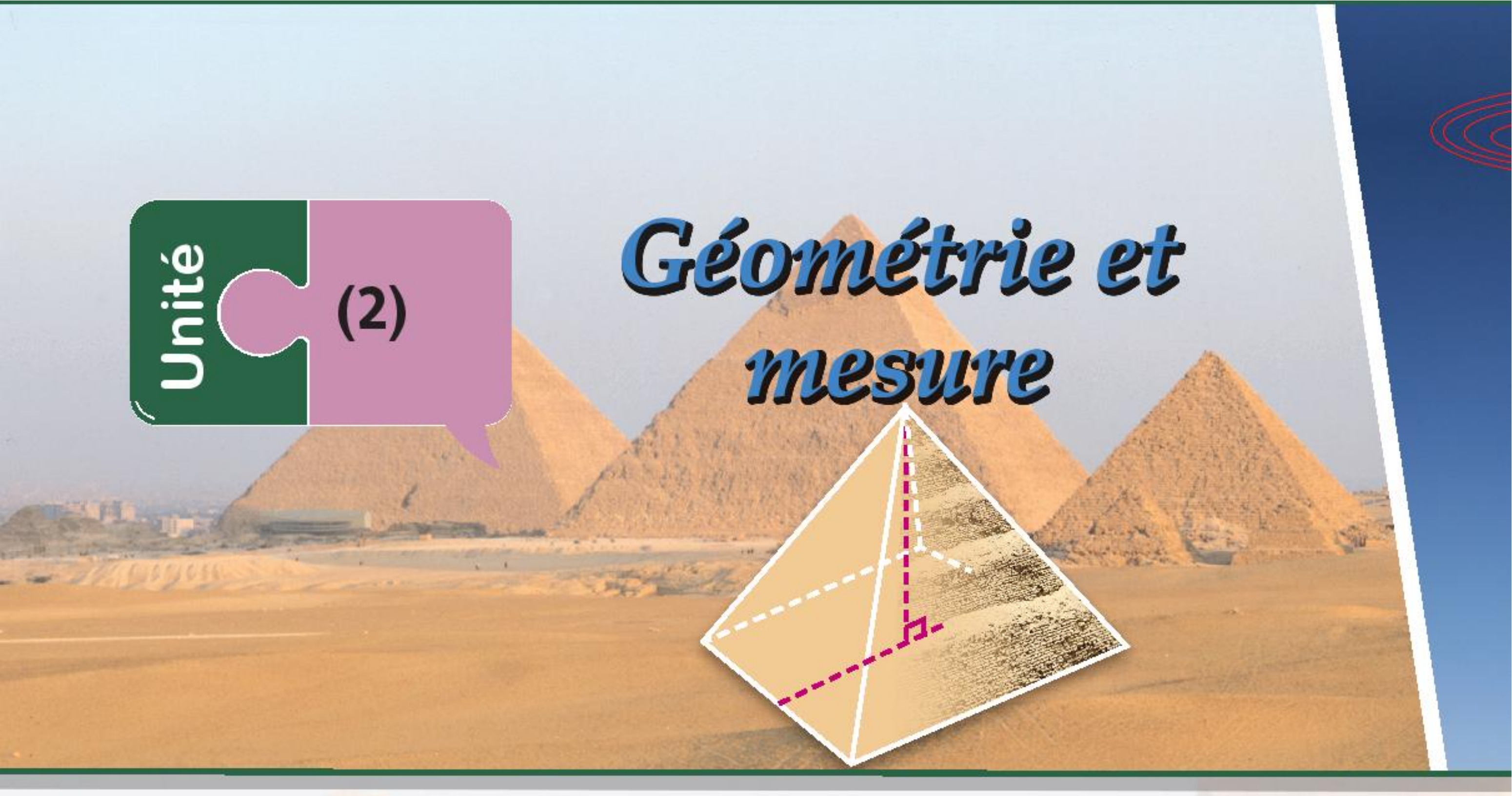
12. Un corps de (P) de poids est placé sur un plan rugueux incliné d'un angle de mesure (θ) à l'horizontal. On trouve que la plus petite force parallèle à la ligne de plus grande pente du plan et rend le corps sur le point de se mouvoir vers le haut du plan est égale à $2\ P \sin\theta$. Démontrez que :
    a La mesure de l'angle de frottement = θ **b** L'intensité de la réaction résultante = P

13. Un corps de 25 kg.p de poids est posé sur un plan incliné rugueux. Une force F agit sur le corps suivant la ligne de plus grande pente vers le haut. Si le corps est sur le point de se mouvoir vers le haut quand F = 15 kgp, et sur le point de se mouvoir vers le bas quand F = 10 kgp Déterminez :
    a La mesure de l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontal
    b le coefficient de frottement statique entre le corps et le plan

14. Un corps de 8 kgp de poids est posé sur un plan horizontal rugueux. On a incliné le plan régulièrement jusqu'à le corps soit sur le point de se glisser vers le bas quad l'angle d'inclinaison est de 30°. Déterminez le coefficient de frottement statique entre le corps et le plan. Si le corps est attaché par un fil et tiré dans une direction inclinée d'un angle de 30° sur le plan jusqu'au le corps est sur le point de se mouvoir vers le haut. Déterminez :
    a L'intensité de la tension
    b L'intensité de la réaction normale

Unité (2)

Géométrie et mesure



Introduction de l'unité

La géométrie a débuté à son origine par le côté pratique. Les Pharaons l'ont utilisée pour déterminer les superficies des terrains, construire les pyramides et les temples. Ils ont trouvé les superficies et les volumes de quelques solides. Lorsque Thalès (640-546 av JC) a visité Alexandrie, il a aimé les méthodes employées par les pharaons pour mesurer la terre et il leur a donné le nom de géométrie qui vient du grec « geo » qui veut dire la terre et « metron » qui veut dire mesure. Il s'est intéressé à l'étude de la géométrie en tant que expression explicite abstraite démontrable.

La géométrie s'est développée avec les Grecs (Thales, Pythagore, Euclide) avec l'apparition d'une série de théorèmes basés sur des axiomes et des définitions liés dans un système logique précis cité par Euclide dans son ouvrage, les Éléments de mathématiques, en treize livres. Alexandrie présentait le minaret de la connaissance jusqu'à l'arrivée des Arabes qui ont conservé ce patrimoine en le traduisant an arabe, lui rajoutant des ajouts importants et l'ont rapporté en Europe au XIIème siècle.

Au XVIème siècle, la renaissance des mathématiques a débuté avec de nouvelles sciences. Descartes (1596 - 1650) a fondé les bases de la géométrie analytique, la présentation les équations par des figures graphiques et géométriques ainsi que l'expression des figures par des équations. Il a déduit l'équation du cercle : x2 + y2 = r2. Euler a trouvé la relation entre le nombre des côtés, des sommets et des arêtes d'un solide à base polygone qui est : Le nombre de faces + Le nombre de sommets = Le nombre d'arêtes + 2

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- savoir définir le point , la droite et le plan dans l'espace.
- Identifier quelques solides (la pyramide, la pyramide régulière, la pyramide droite, le cône, le cône droit) et connaître les propriétés de chacun.
- Déduire l'aire latérale et l'aire totale de la pyramide droite et du cône droit.
- Déduire le volume de la pyramide droite et du cône droit.
- Déterminer l'équation du cercle en fonction des coordonnées de son centre et de la longueur de son rayon.
- Déduire la forme générale de l'équation du cercle.
- Déterminer les coordonnées du centre du cercle et la longueur de son rayon en connaiss ant.de l'équation générale du cercle.
- Appliquer ce qu'il a appris en géométrie et mesure dans la modélisation de situations en rapport avec les mathématiques et la vie quotidienne.

Vocabulaires de base

- le point
- la droite
- le plan
- l'espace
- le sommet
- la base
- l'axe
- le cercle
- le centre
- le rayon
- le diamètre
- la pyramide
- le cône
- la face latérale
- l'arête latérale
- l'hauteur
- l'hauteur latérale
- la pyramide régulière
- la pyramide droite
- patron d'une pyramide
- le cône circulaire droit
- l'aire latérale
- l'aire totale
  (l'aire de la surface)

Aides pédagogiques

- Instruments géométriques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Leçons de l'unité

Leçon (2-1): droite et plan.

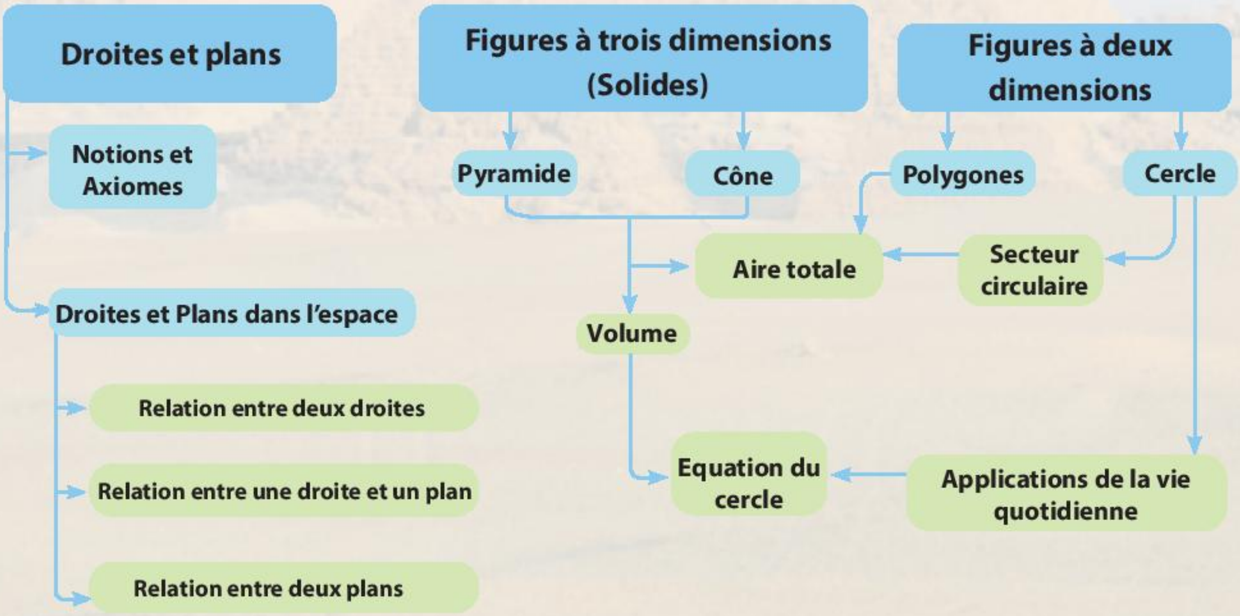
Leçon (2-2): Pyramide et Cône.

Leçon (2-3): Aire latérale et aire totale d'une pyramide et d'un cône.

Leçon (2-4): Volume d'une pyramide et d'un cône

Leçon (2-5): Equation du cercle.

Organigramme de l'unité



2 - 1 Droites et plans dans l'espace

Allez apprendre

- Notions et axiomes géométriques
- Relation entre deux droites dans l'espace
- Relation entre
- Une droite et un plan
- Dans l'espace
- Différents positions
- Relatives de deux plans

Vocabulaires de base

- Le point
- La droite
- Le plan
- L'espace

Aides pédagogiques

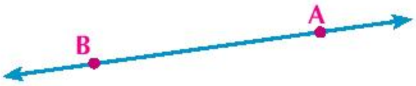
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme
- Instruments géométriques

Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà étudié des notions mathématiques du point, de la droite et du plan. Alors pouvez vous répondre aux questions suivantes :

- Par quoi pouvez-vous représenter votre ville sur la carte de l'Egypte ?
- Combien de points faut-il dessiner pour tracer une droite ?
- Pour vous, que représente :
- le sol de la classe, la surface de la table et la surface du mur ?
- la surface d'un ballon, le dôme d'une mosquée et la surface de la bouteille de gaz ?

Activité



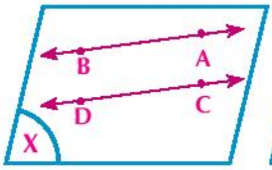
Tracez deux points différents, A et B sur une feuille de papier cartonné.
Utilisez une règle pour relier les deux points A et B et prolonge la droite.
Essayez de tracer une autre droite passant par les deux points.
Pouvez-vous tracer une autre droite ?
Qu'est ce que vous déduisez de cette activité ?

Activité

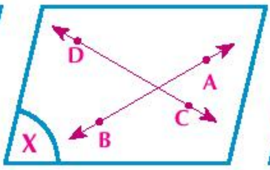
Tracez trois points non alignés A, B et C, comme indiquar la figure ci-contre Posez un côté d'un papier cartonné à la forme d'un rectangle sur la droite $\overleftrightarrow{AB}$ pliez le papier autour de la droite $\overleftrightarrow{AB}$ jusque à ce que le papier passe par le point C.
Combien de position dans laquelle le point C coïncide au plan du papier pendant un tour complét du papier

Axiomes Géométriques :

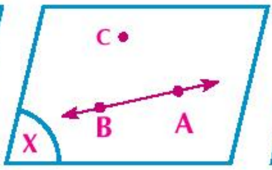
- Une droite est bien déterminée par deux points distincts.
- Un plan est bien déterminée par l'un des cas suivants:



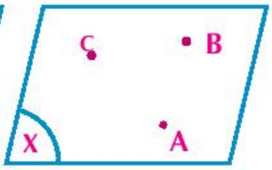
Deux droites parallèles



Deux droits sécantes



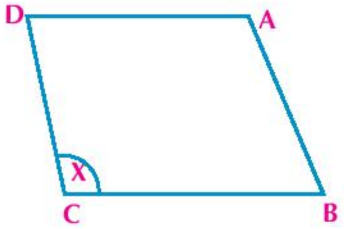
Une droite et un point à l'extérieur de cette droite



Trois points non alignés

- Par un point de l'espace passe une infinité des plans.

Le plan : un plan est une surface illimitée dont toute droite passant par deux de ses points est inclus complètement dans cette surface. Dans la figure contre : Un plan est symbolisé par X ; Y ; Z ; ……… ou par 3 lettres au moins comme ABC ; ………. et il n'est pas limité de touts les sens. On le représente par un triangle, un carré, un rectangle, un parallélogramme, un cercle, …….

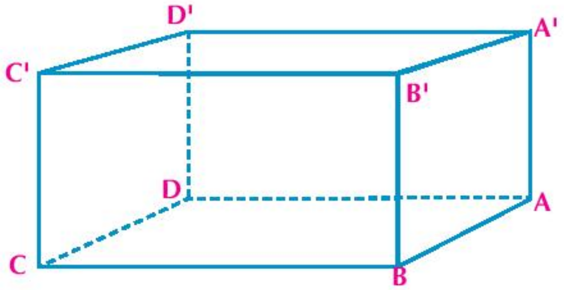


L'espace : un espace est un ensemble infini de points et il contient touts les figures, les plans, les solides qu'on étudie.

Example

(1) Observez la figure ci-contre et réponds aux questions suivantes.

- (a) Déterminez trois droites passant par le point A.
- (b) Déterminez les droites passant par A et B à la fois.
- (c) Déterminez trois plans passants par A.
- (d) Déterminez trois plans passant par A et B à la fois.



Solution

(a) $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AA'}$; $\overleftrightarrow{AD}$

(b) $\overleftrightarrow{AB}$

(c) ABB' ; ABC ; ADD'

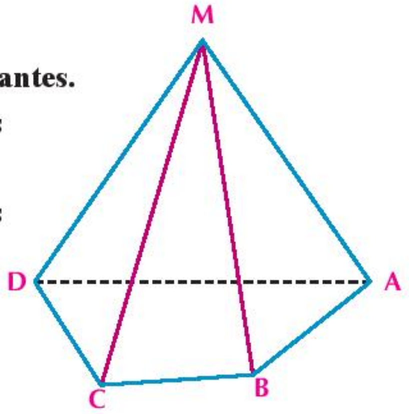
(d) ABB' ; ABC ; ABC'D'

Essayez de résoudre

(1) **Observez la figure ci-contre et répondez aux questions suivantes.**

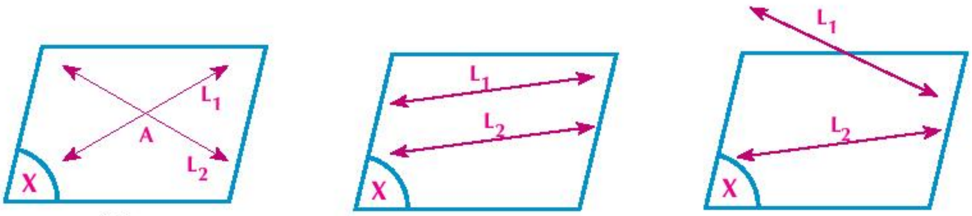
(a) Combien de droites dans cette figure ? Déterminez les droites passant par le point A?.

(b) Combien de plans dans cette figure? Déterminez trois plans passant par le points A?.



Relation entre deux droites dans l'espace :

Observez les figures suivantes, puis complétez :



(1) (2) (3)

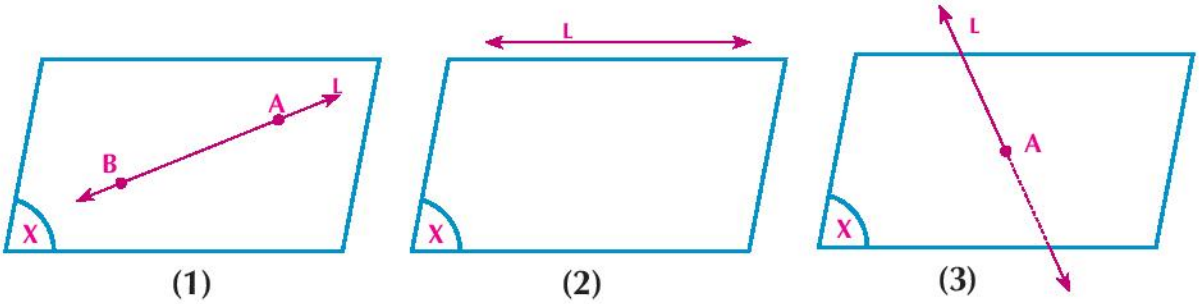
1- Deux droites sécantes : qui sont incluses dans un même .... et elles ont .... en commun.

2- Deux droites parallèles : qui sont incluses dans un même .... et elles n'ont .... en commun.

3- Deux droites non-coplanaires : qui ne peuvent pas être incluses ....

Pensé critique : Les deux droites non-coplanaires ne sont ni parallèles ni sécantes. Expliquez.

Relation entre une droite et un plan dans l'espace. Observez les figures suivantes, puis complétez :

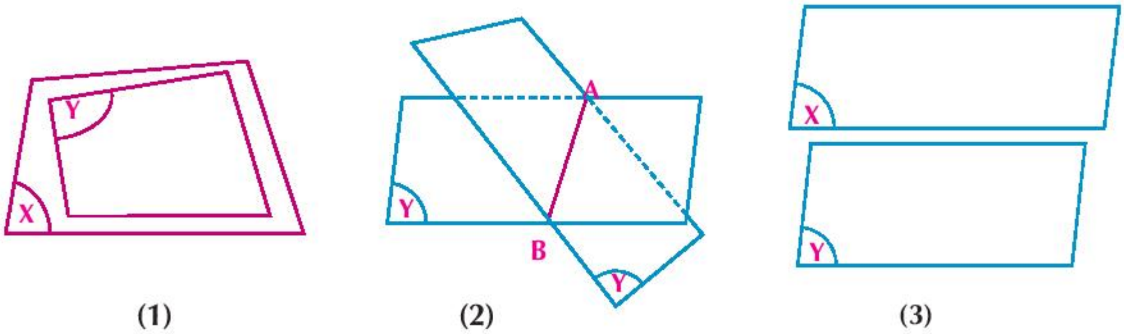


(1) (2) (3)

- La droite est parallèle au plan dans la figure ....
- La droite coupe le plan dans la figure ....
- La droite est incluse dans le plan dans la figure ....

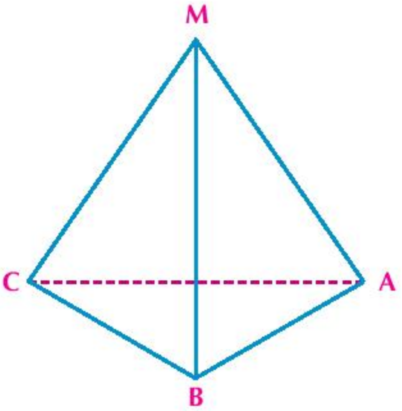
Positions relatives de deux plans

Observez les figures suivantes, puis complétez :



(1) (2) (3)

- Les deux plans sont parallèles dans la figure ....
- Les deux plans sont confondus dans la figure ....
- Les deux plans sont sécants dans la figure ....



Exemple

2 Observez les figures suivantes, puis complétez:

a) Le plan MAB ∩ le plan MBC = ...

b) Le plan MBC ∩ le plan ABC = ...

c) $\overleftrightarrow{MB}$ ∩ le plan ABC = ...

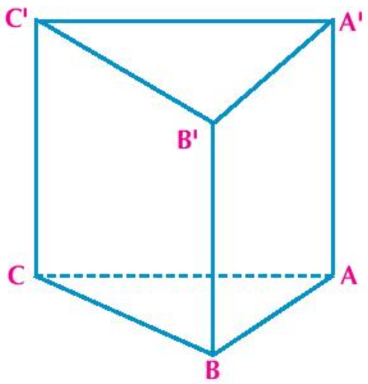
d) $\overleftrightarrow{MC} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = ...

e) Le plan MAB ∩ le plan MBC ∩ le plan MAC = ...

Solution

a) $\overleftrightarrow{MB}$ b) $\overleftrightarrow{BC}$ c) {B}

d) ϕ (car elles sont deux droites non-coplanaires) e) {M}



Essayer de résoudre :

2 Observez la figure suivante, puis complétez :

a) Le plan ABB'A' ∩ le plan BCC'B' = ...

b) Le plan ABC ∩ le plan A'B'C' = ...

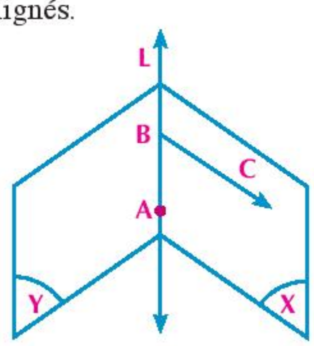
c) $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ = ...

d) $\overleftrightarrow{BB'}$ ∩ le plan A B C = ...

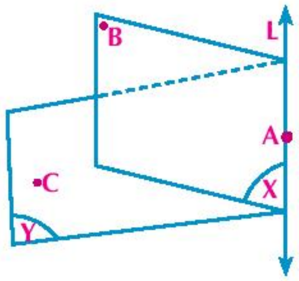
Exercice (2 - 1)

Complétez:

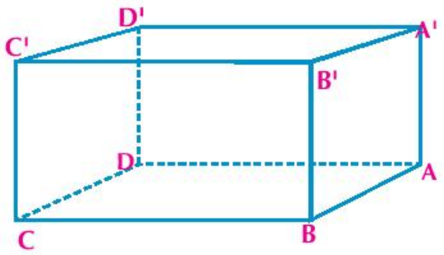
1. La droite L // au plan X alors $L \cap X =$ ……………
2. Si la droite $L \subset$ le plan X alors $L \cap X =$ ……………
3. Si la droite L_1 // la droite L_2, alors $L_1 \cap L_2 =$ ……………
4. Si X ; Y sont deux plans tel que: $X \cap Y = \phi$ alors X …………… Y
5. Les deux non coplanaires ne sont ni …………… ni ……………
6. **Citez le nombre de plans qui passent par :**
   - a) Un point donné.
   - b) Deux points distincts.
   - c) Trois points alignés.
   - d) Trois points non alignés.
   - e) Quatre points non-coplanaires



7. Observez la figure ci-contre, puis complétez en utilisant ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$)
   - a) L …… X
   - b) A …… X
   - c) C …… Y
   - d) $\overleftrightarrow{BC}$ …… Y
8. Dans la figure ci–contre : X , Y sont deux plans sécants en L , $A \in L$, $B \in X$, $B \notin Y$, $C \in Y$, $C \notin X$. Complétez :
   - a) Le plan X $\cap$ le plan ABC = ……………
   - b) Le plan Y $\cap$ le plan ABC = ……………
   - c) Le plan X $\cap$ le plan Y $\cap$ le plan ABC = ……………



9. **Observez la figure ci – contre, puis complétez:**
   - a) Le plan ABCD // au plan ……………
   - b) Le plan BCC'B' // au plan ……………
   - c) Le plan ABB'A' $\cap$ Le plan ABCD = ……………
   - d) Le plan ABB'A' $\cap$ Le plan DCC'D'= ……………
   - e) Le plan DCC'D' $\cap$ Le plan ABCD $\cap$ Le plan ADD'A'= ……………



10 Mettez le signe (✓) devant la phrase juste et le signe (✗) devant la phrase fausse
Soient L_1 , L_2 deux droites et X,Y deux plans:

a) Si $L_1 \cap L_2 = \phi$ **alors** $L_1 // L_2$ **ou** L_1 , L_2 sont non coplanaires

b) Si $L_1 \cap X = \phi$ **alors** $L_1 // X$

c) Si $L_2 \cap X = L_2$ **alors** $L_2 \subset X$

d) Si $L_2 \subset Y$ **alors** $L_2 \cap Y = \phi$

e) Si $X \cap Y = \phi$ **alors** $X // Y$

f) Si X = Y **alors** X et Y sont confondus.

Choisissez la bonne réponse :

11 Quatre points non coplanaires :

a) déterminent deux plans.
b) déterminent trois plans.
c) déterminent quatre plans.
d) ne déterminent pas un plan.

12 Si deux plans ont deux points A et B en commun, alors ils :

a) sont confondus
b) sont sécants en $\overleftrightarrow{AB}$
c) sont sécants en une droite parallèle à $\overleftrightarrow{AB}$
d) ont un troisième n'appartient point en commun qui n'appartient pas à $\overleftrightarrow{AB}$

13 $\overleftrightarrow{AB}$ est parallèle au plan X si

a) $\overline{AB} \cap X = \phi$
b) A et B sont situés de part et d' autre de X
c) A et B ne sont pas équidistante de X
d) $\overleftrightarrow{AB} \cap X = \phi$

14 Les droites L_1 et L_2 sont parallèles si:

a) $L_1 \cap L_2 = \phi$
b) L_1 et L_2 sont inclus dans un même plan
c) $L_1 \cap L_2 = \phi$, L_1 , L_2 sont inclus dans un même plan.
d) $L_1 \cap L_2 = \phi$, L_1 , L_2 sont pas inclus dans un même plan.

15 Deux droites sont non coplanaires s'elles :

a) ne sont pas parallèles
b) ne sont pas confondues
c) ne sont pas inclus dans un même plan.
d) sont inclus dans un même plan.

Réflexion créative:

16 Montrez par un dessin que: si trois plans se coupent deux à deux, alors leuss droites d'intersection sont parallèles ou sont concourantes.

2 - 2 Pyramide et cône

Allez apprendre

- Propriétés de quelques solide
- (pyramide – pyramide régulière
- pyramide droite – cône – cône droit).
- Notion du patron d'un solide et déduction des propriétés d'un solide à partir de son patron.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne en utilisant les propriétés de la pyramide et du cône.

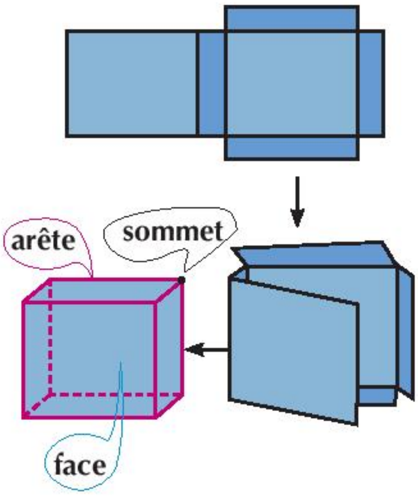
Vocabulaires de base

- Pyramide
- Cône
- Face latérale
- Arête latérale
- Hauteur
- Hauteur latérale
- Pyramide régulière
- Pyramide droite
- Patron
- Cône circulaire

Aides pédagogiques

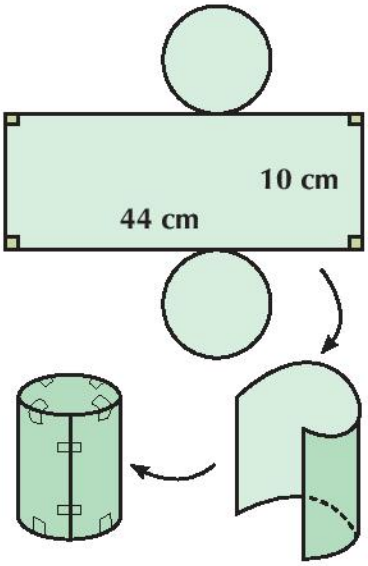
- Instrument le géométriques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Plusieurs sortes de boîtes sont fabriquées par le pliage de papier cartonné pour former des figures à trois dimensions qu'on utilise pour emballer les produits des usines avant de les commercialiser. Ces figures à trois dimensions occupent une place de l'espace comme le cube, le parallélépipède rectangle etc.



- ➢ Le cube admet combien de faces et combien de sommets ?
- ➢ Le parallélépipède rectangle admet combien d'arêtes ?
- ➢ Les faces d'un cube sont-elles toutes superposables ? Expliquez votre réponse.

La figure qu'on peut plier pour former un solide est appelée le patron du solide à partir duquel, on peut déduire les propriétés du solide



La figure ci-contre montre le patron d'un cylindre droit. On remarque que:

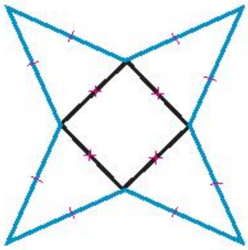
1 - les deux bases du cylindre sont deux cercles superposables

2 - la surface latérale du cylindre avant son pliage le plier est un rectangle de dimensions 44 cm et 10 cm et par conséquent, la hauteur du cylindre est 10 cm.

Quel est la longueur du rayon de la base du cylindre ?

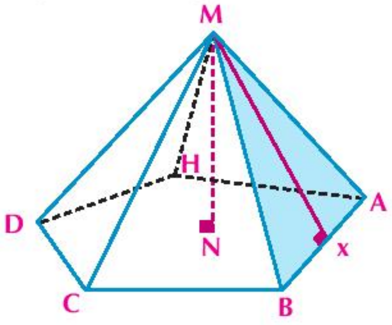
Reffichissez:

Peut-on connaitre le nom du solide qu'on peut former en pliant le patron ci-contre ? Peut-on tracer plus qu'un patron pour un même solide ? Expliquez votre réponse.



Pyramide :

C'est un solide qui a pour base un polygone quelconque et pour faces latérales des triangles ayant un sommet commun. La pyramide peut être à base triangulaire ou quadrilatère ou pentagonale etc. selon le nombre de côtés de sa base.



Remarquez que : dans la figure ci-contre, MABCDE est une pyramide pentagonale de sommet M. Sa base est le polygone ABCDE. Ses faces latérales sont les triangles MAB, MBC, MCD, MDH, MHA. Ses arêtes latérales sont $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, $\overline{MH}$.

La hauteur de la pyramide MN est la distance de son sommet au plan de sa base.

La hauteur latérale de la pyramide MX est la distance de son sommet à un côté de sa base.

Définition

Pyramide régulière

C'est une pyramide de base est un polygone régulier dont le centre est le pied de la hauteur abaissée du sommet de la pyramide sur cette base.

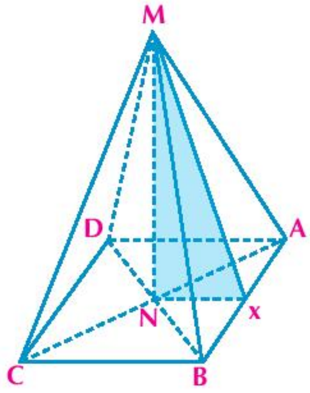
Rappel

Un polygone régulier est un polygone dont les côtés sont de même longueur, les angles sont de même mesure et dont le centre est celui du cercle inscrit ou du cercle circonscrit au polygone.

Propriétés d'une pyramide régulière

1 - **Les arêtes latérales sont de même longueur.**
2 - **Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.**
3 - **Les hauteurs latérales sont de mêmes longueurs.**

Remarques importantes :



La perpendiculaire abaissée du sommet d'une pyramide au plan de sa base est perpendiculaire à toute droite de cette base.

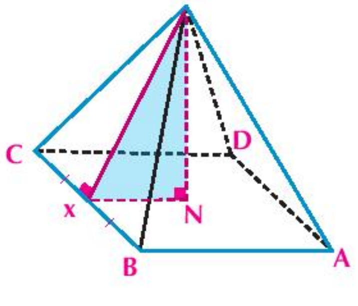
Dans la figure ci-contre, si $\overline{MN}$ est perpendiculaire au plan de la base, alors $\overline{MN} \perp \overline{AC}$, $\overline{MN} \perp \overline{BD}$, $\overline{MN} \perp \overline{NX}$

$\therefore$ Dans ce cas, le triangle MXN est rectangle en N

Example

(1) MABCD est une pyramide régulière à base quadrilatère dont la longueur des a base ut 10 cm et de hauteur 12 cm. Calculer sa hauteur.

Solution :



$\because$ La pyramide est régulière

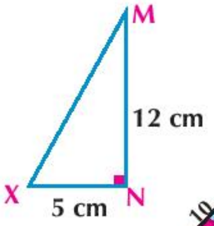
$\therefore$ $\overline{MN} \perp$ est au plan ABCD

où N est le point d'intersection des diagonales du carré ABCD

et MN = 12 cm.

Si X est le milieu de $\overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$ (Pourquoi?)

Alors, $\overline{MX}$ est la hauteur latérale.



Dans △ DBC: N est le milieu de $\overline{DB}$, et X est le milieu de $\overline{MA}$

$\therefore$ NX $= \frac{1}{2}$ DC $= \frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm

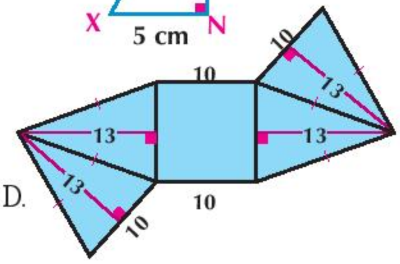
$\because$ $\overline{MN} \perp$ plan ABCD

$\therefore$ △ MNX est rectangle en N

$\therefore$ $(MX)^2 = (MN)^2 + (NX)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore$ La hauteur latérale de la pyramide = 13 cm.

La figure ci-contre illustre l'un des pation de la pyramide MABCD.



Essayez de résoudre

1) MABCD est une pyramide régulière à base quadrilatère de hauteur 20 cm et de hauteur latérale 25 cm. Calculez la longueur de sa base.

Pyramide droite

Une pyramide est droite si et seulement si le pied de la hauteur abaissée de son sommet sur sa base est le centre géométrique de cette base.

Réfléchissez :

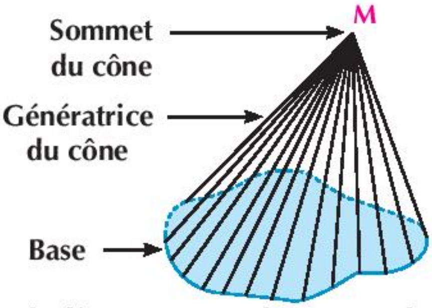
1 - Une pyramide régulière est-elle une pyramide droite ? Expliquez votre réponse.

2 - Les hauteurs latérales d'une pyramide droite sont – elles de même longueur

Note : Une pyramide triangulaire régulière est appelé tétraèdre si ses faces sont toutes des triangles équilatéraux et chacun d'eux peut être la base.

Cône

C'est un solide ayant une seule base sous la forme d'une courbe fermée et un seul sommet. Sa face latérale est formée de tous les points appartenant aux segments reliant son sommet aux points de la courbe sa base. Chaque segment est appelé une génératrice du cône.



Cône droit

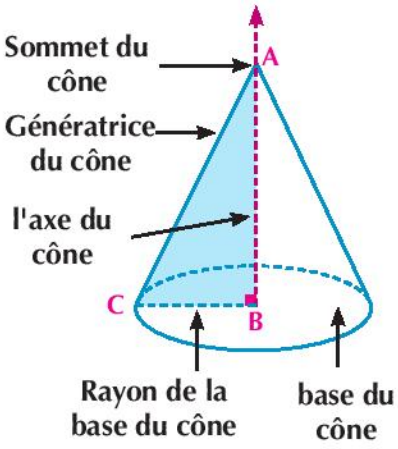
C'est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle d'un tour complet autour de l'un des côtés de l'angle droit. Ce côté est appelé axe de rotation .

Propriétés du cône droit

La figure ci-contre montre un cône circulaire droit engendré par la rotation du triangle rectangle en B d'un tour complet autour de $\overleftrightarrow{AB}$ comme axe. On a :

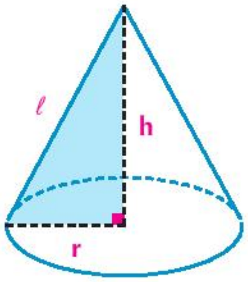
1- $\overline{AC}$ est la génératrice du cône, A est son sommet, le point C décrit, pendant la rotation, un cercle de centre B et de rayon égal à la longueur de $\overline{BC}$, La surface de ce cercle est la base du cône.

2- $\overleftrightarrow{AB}$ l'axe du cône est perpendiculaire. (⊥) au plan de la base, La hauteur du cône est égale la longueur de $\overline{AB}$.



Example

(2) Soit un cône circulaire droit de génératrice de longueur 17 cm et de hauteur 15 cm. Trouvez la longueur du rayon de sa base..



Solution:

On considère la longueur de la génératrice ℓ, la hauteur du cône h, et la longueur du rayon de la base = r

$\because r^2 = \ell^2 - h^2$

$\therefore r^2 = (17)^2 - (15)^2 = 64$

$\therefore r = 8$ cm

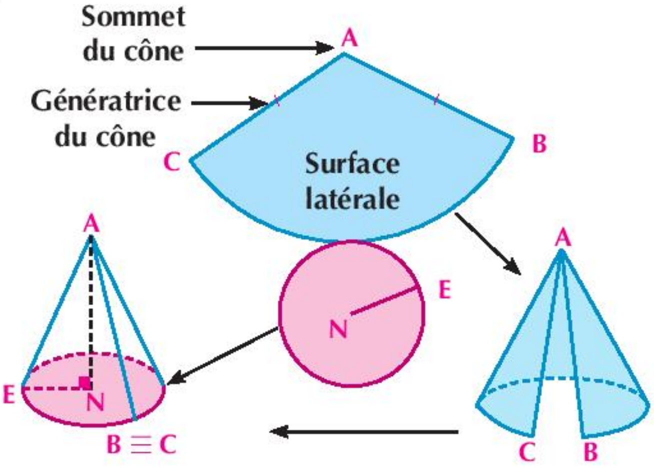
Essayez de résoudre

(2) Trouvez en fonction de π le périmètre et l'aire de la base d'un cône circulaire droit de hauteur 24 cm et de longueur génératrice 26 cm

Réfléchissez : ABC est triangle tel que AB = AC et D est le milieu de $\overline{BC}$. Si le triangle ABC fait un dème tour complet autour de $\overleftrightarrow{AD}$ comme axe de rotation, cette rotation peut-elle engendrer un cône circulaire droit ? Expliquez votre réponse.

Patron d'un cône droit :

On peut plier le patron d'un cône droit pour fabriquer des boîtes coniques comme le montre la figure ci-contre où:



1 - $AB = AC = \ell$ **(la longueur de la génératrice du cône)**

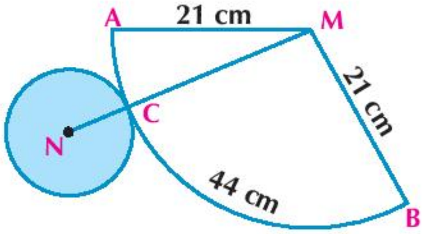
2 - Le secteur ABC représente la surface latérale du cône et la longueur de $\overset{\frown}{BC} = 2\pi r$

(r est la longueur du rayon de la base du cône)

3 - La hauteur du cône = la longueur de $\overline{AN}$

Example

(3) La figure ci-contre indique le patron d'un cône droit. Á l'aide des informations indiquées, trouvez sa hauteur ($\pi \simeq \frac{22}{7}$).



Solution:

Dans le patron, on remarque que : La longueur de la génératrice du cône = La longueur de $\overline{MA}$ = 21 cm

Le périmètre de la base du cône = la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = 44 cm.

La longueur du rayon de la base du cône = la longueur de $\overline{CN}$ = r

En pliant le patron du cône, on obtient la figure ci-contre.

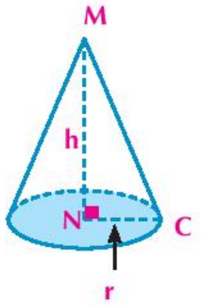
Donc: La hauteur du cône = La longueur de $\overline{MN}$ = h

$\because 2\pi r = 44$ $\therefore 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$ **alors** r = 7 cm

$\because h^2 = L^2 - r^2$

$\therefore h^2 = (21)^2 - (7)^2 = 14 \times 28$ **alors** $h = 14\sqrt{2}$ cm

$\therefore$ La hauteur du cône = $14\sqrt{2}$ cm.



Essayez de résoudre :

3. Dans le patron du cône droit précédent, si MA = 41 cm et la longueur de $\overset{\frown}{AB} = 18\pi$ cm. trouvez la hauteur du cône.

Pensé critique : L'expression suivante est-elle vraie ? « La hauteur d'un cône droit > la longueur de sa génératrice ». Expliquez votre réponse.

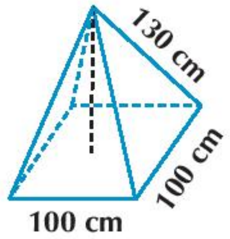
Exercices (2 - 2)

1. Dans une pyramide pentagonale régulière :
   - a. Quel est le nombre de ses faces latérales?
   - b. Quel est le nombre de ses faces?
   - c. Quel est le nombre de ses arêtes latérales?
   - d. Quel est le nombre de ses arêtes?
   - e. La pyramide a un seul sommet autre que les sommets de la base. Quel est le nombre de tous les sommets d'une pyramide pentagonale ? Est-ce que votre réponse vérifie la relation d'Euler pour tout solide à base polygonale ?

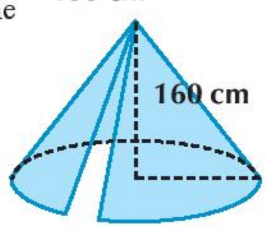
   «Nombre de faces + nombre de sommets = Nombre d'arêtes + 2»

2. Dans une pyramide régulière, rangez les longueurs suivantes de la plus petite à la plus grande
   - a. la longueur de l'arête latérale
   - b. la hauteur de la pyramide
   - c. la hauteur latérale

3. **Génie civil:** La figure ci-contre montre un réservoir d'eau sous la forme d'une pyramide régulière à base quadrilatère. Á l'aide des informations indiquées, trouver la hauteur latérale et la hauteur.



4. **4 En lien avec le scoutisme :** Soit une tente sous la forme d'un cône circulaire droit de hauteur 160 cm et de périmètre de base 753,6 cm. Calculez la longueur de la génératrice du cône représentant la tente.



5. **En lien avec le tourisme:** La grande pyramide de Gizeh (pyramide de Khéops) a pour longueur de base 232 mètres et de hauteur latérale 186 mètres. Calculez la hauteur de cette pyramide..

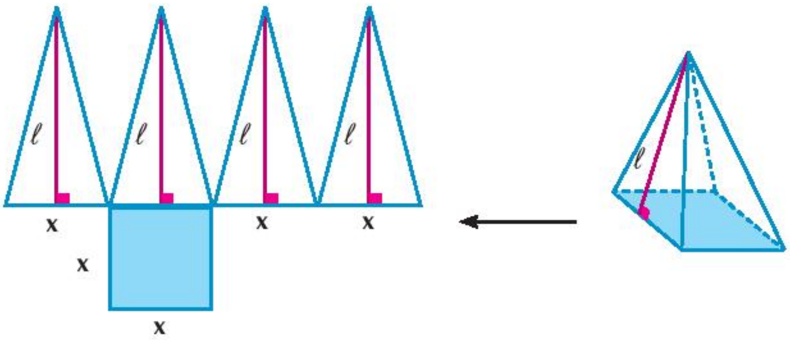
Aire latérale et aire totale d'une pyramide et d'un cône

2 - 3

Vous avez déjà étudié les propriétés d'une pyramide régulière et d'un cône circulaire droit et vous avez déduit certaines de ses propriétés à partir de leurs patrons. Maintenant, pouvez-vous calculer l'aire latérale et l'aire totale de chacun des deux solides à partir de leurs patrons ? Expliquez votre réponse

Aire totale d'une pyramide régulière

La figure suivante montre une pyramide régulière à base carrée et l'un de ses patrons.



Remarquez que: Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables et que les hauteurs latérales sont de même longueur = ℓ. La base de la pyramide est un polygone de longueur de côté = x et on a :

Aire latérale de la pyramide = La sommes des aires des faces latérales

= sum of the area of the lateral faces.

$= \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell$

$= \frac{1}{2}\, (x + x + x + x)\, \ell$

$= \frac{1}{2}$ le périmètre de la base de la pyramide de × la hauteur latérale

Aire totale de la pyramide = Son aire latérale + L'aire de sa base.

A apprendre

Aire latérale d'une pyramide régulière = $\frac{1}{2}$ du périmètre de sa base × La hauteur latérale.

Aire totale d'une pyramide =

Son aire latérale + L'aire de sa base.

Allez apprendre

- Calcul de l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide régulière et d'un cône droit.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne com-portant l'aire latérale d'une pyramide et d'un cône droit.

Vocabulaires de base

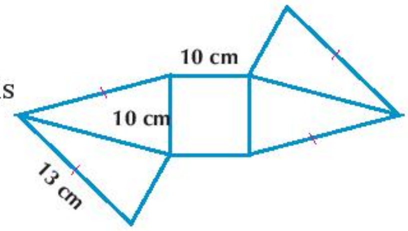
- Aire latérale
- Aire totale

Aides pédagogique

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels de graphisme*

Exemple

(1) En utilisant le patron ci-contre, décrivez le solide puis calculez son aire totale.

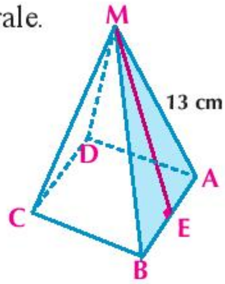


Solution

Le patron est celui d'une pyramide régulière à base carrée.

Sa base est un carré de 10 cm de longueur. La longueur de son arête latérale = 13 cm.

$\because$ La face latérale MAB est un triangle isocèle et $\overline{ME}$ est une hauteur latérale.



$\therefore$ E est le milieu de $\overline{AB}$ d'où AE = 5 cm

Dans $\triangle$ MAE rectangle en E, on a :

$(ME)^2 = (AM)^2 - (AE)^2$

$(ME)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$

$\therefore$ M E = 12 cm

$\because$ L'aire latérale d'une pyramide régulière = $\frac{1}{2}$ du périmètre de sa base $\times$ La hauteur latérale

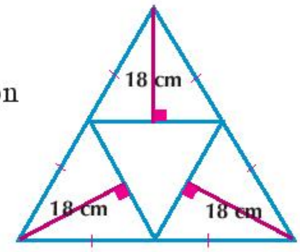
$\therefore$ L'aire latérale $= \frac{1}{2} \times (10 \times 4) \times 12 = 240$ cm^2

$\because$ L'aire de la base de la pyramide $= (10)^2 = 100$ cm^2

$\therefore$ L'aire totale de la pyramide $= 240 + 100 = 340$ cm^2

Essayiez de résoudre

(1) En utilisant le patron ci-contre, décrivez le solide puis calculez son aire totale.



Aire totale d'un cône droit

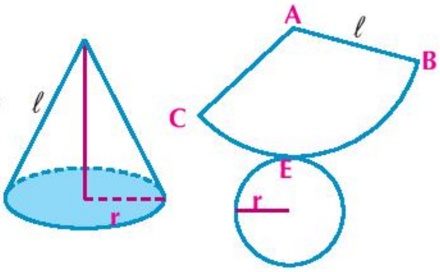
D'après le patron du cône droit de la figure ci-contre :

L'aire du secteur ABC $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ La longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$

$= \frac{1}{2} \ \ell \times$ Le périmètre de la base du cône

$= \frac{1}{2} \ \ell \times 2\pi r = \pi \ell r$

= L'aire latérale du cône



L'aire lotale du cône = son aire latérale + aire de sa base

A apprendre

Aire latérale d'un cône droit = $\pi \ell r$

Aire totale d'un cône droit = $\pi \ell r + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$

où ℓ est la longueur de sa génératrice et r est la longueur du rayon du cercle de la base

Rappel :

Secteur circulaire

$\theta^{rd} = \frac{\ell}{r}$

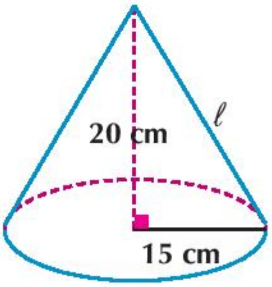
Périmètre du secteur = $2r + \ell$

Aire du secteur = $\frac{1}{2} r\ell - \frac{1}{2} \theta^{rd} r^2$

Exemple

(2) Calculez l'aire latérale d'un cône droit de longueur de rayon de base 15 cm et de hauteur 20 cm.

Solution



Pour trouver la longueur de la génératrice du cône ℓ

$\because\ \ell^2 = (20)^2 + (15)^2 = 625$

$\therefore\ \ell = 25$ cm

$\because$ Aire latérale du cône = $\pi \ell r$, r = 15 cm

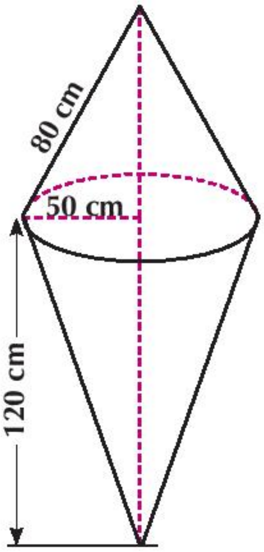
$\therefore$ Aire latérale du cône droit = $25 \times 15\pi = 375\,\pi$ cm^2

Essayiez de résoudre

(2) Calculez l'aire totale d'un cône droit de longueur génératrice 17 cm et de hauteur 15 cm.

Exemple

(3) **Navigation maritime :** La figure ci-contre montre un signal indicateur (une bouée) pour déterminer le trajet maritime. Ce signal est sous la forme de deux cônes droits ayant une même base.
Trouvez le coût de sa peinture d'une matière résistante à l'érosion sachant que le coût d'un mètre carré est de 300 L.E



Solution:

L'aire de la surface du signal indicateur =
l'aire latérale du premier cône + l'aire latérale du deuxième cône

Premier cône: $\ell_1 = 80$ cm , $r = 50$ cm

$\therefore$ l'aire latérale = $50 \times 80\,\pi$

$= 4000\pi$ cm^2

Deuxième cône : h = 120 cm , r = 50 cm

$\therefore\ \ell_2 = \sqrt{(120)^2 + (50)^2} = 130$ cm

$\therefore$ L'aire latérale = $50 \times 130\pi = 6500\,\pi$ cm^2

L'aire de la surface du signal indicateur $= (4000 + 6500)\pi = 10500\,\pi$ cm^2

$\simeq 3{,}299$ mètres carrés

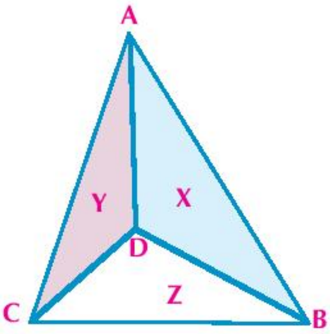
Le coût de la peinture $= 3{,}299 \times 300 = 989{,}7$ L.E

Essayiez de résoudre

(3) Un abat-jour sous la forme d'un cône droit a pour périmètre de base 88 cm et pour hauteur 20 cm. Calculez son aire à un centimètre carré près.

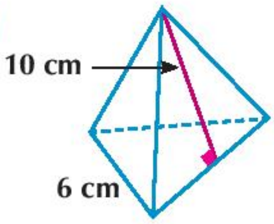
Exercises (2 -3)

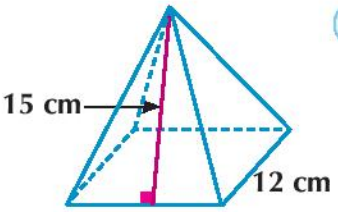
1 La figure ci – contre représente une pyramide triangulaire, X, Y et Z sont trois plans. Complétez :

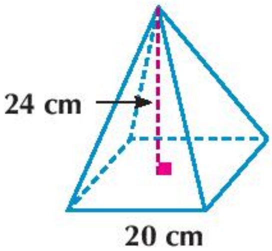


- **a** $X \cap Y =$ ....
- **b** $X \cap Z =$ ....
- **c** $Y \cap Z =$ ....
- **d** $\overleftrightarrow{AB} \cap X =$ ....
- **e** $\overleftrightarrow{BC}$ .... X , $\overleftrightarrow{BC}$ .... Z
- **f** $X \cap Y \cap Z =$ ....

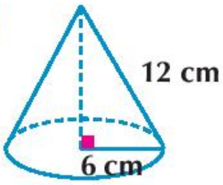
2 Trouvez l'aire latérale et l'aire totale de chacune des pyramides régulières suivantes à l'aide des informations données

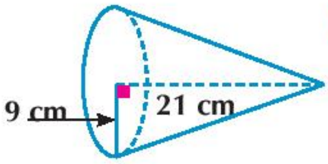
a


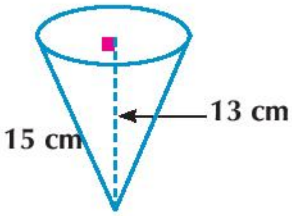
b


c


3 Trouvez l'aire latérale et l'aire totale de chacun des cônes droits suivants à l'aide des informations données.

a


b


c


4 Soit une pyramide régulière à base hexagon dont la de longueur du côté de base est 12 cm et de hauteur latérale $10\sqrt{3}$ cm. Trouvez :

- **a** Son aire latérale
- **b** Son aire totale

5 Trouvez la longueur du rayon du cercle de la base d'un cône droit si la longueur de sa génératrice est 15 cm et son aire totale est 154π cm^2.

Volume d'une pyramide et d'un cône droit

2 - 4

Allez apprendre

- Calcul du volume d'une pyramide régulière.
- Calcul du volume d'un cône droit.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne comportant le volume d'une pyramide régulière et le volume d'un cône droit.

Vocabulaires de base

- Sommet
- Base
- Face
- Axe
- Rayon
- Volume

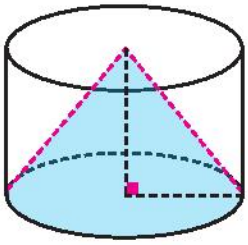
Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme.

Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà appris comment calculer le volume d'un prisme droit et le volume d'un cylindre circulaire droit

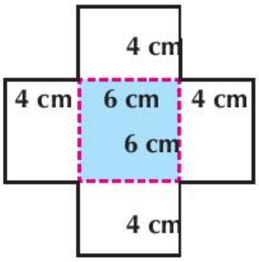
Pouvez-vous estimer le volume d'une pyramide en fonction du volume d'un prisme droit ayant la même aire de base et la même hauteur ?



Pouvez- vous estimer le volume d'un cône droit en fonction du volume d'un cylindre ayant la même aire de base et la même hauteur ?

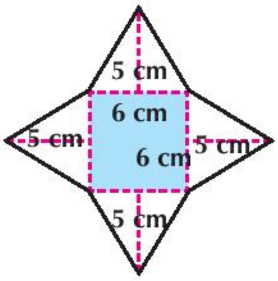
Activité

Comparaison entre le volume d'une pyramide et le volume d'un prisme ayant une même aire de base et une même hauteur..



1- Tracez sur un papier cartonné le patron de la pyramide et celui du prisme indiqué dans la figure ci-contre.

2- Découpez et pliez chaque patron pour former une face la térale d'une pyramide à base carrée et un prisme droit ouvert du haut..



3- Remplissez la pyramide de grains de riz ou de sable puis la vider dans le prisme. Répétez la même opération jusqu'à ce que le prisme soit rempli complètement.

Remarquer que le contenu (les grains de riz ou de sable) nécessaire pour remplir le prisme est égal au triple du contenu nécessaire pour remplir une pyramide.

Donc le volume d'une pyramide = $\frac{1}{3}$ du volume du prisme ayant la même aire de base (b) et la même hauteur (h) que la pyramide.

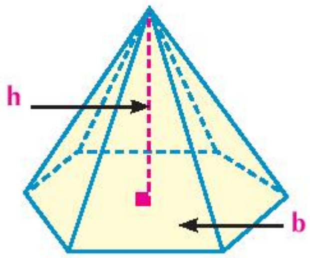
Volume d'une pyramide

Á apprendre

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Donc : Le volume d'une pyramide $= \frac{1}{3}\, b \times h$

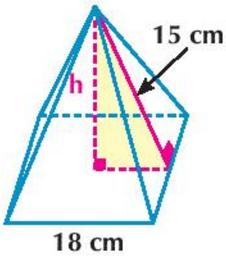
où b est la base de la pyramide et h est la hauteur de la pyramide.



Exemple

(1) Calculez le volume d'une pyramide à régulière base quadrilatère ayant pour longueur de côté de la base 18 cm et de hauteur latérale 15 cm..

Solution:



a) Calcul de l'aire de la base de la pyramide (b)

$\because$ La pyramide est régulière à base quadrilatère.

$\therefore$ Sa base a la forme d'un carré.

Aire de la base de la pyramide (b) = $18 \times 18 = 324$ cm^2

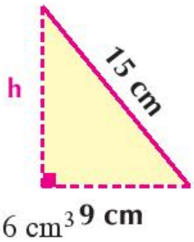
a) Calcule de la hauteur de la pyramide (h)

$\because h^2 + (9)^2 = (15)^2$ théorème de Pythagore

$\therefore h^2 = (15)^2 - (9)^2 = 144$, $h = 12$ cm

$\because$ Volume d'une pyramide $= \frac{1}{3} b \times h$

$\therefore$ Volume de la pyramide $= \frac{1}{3} \times 324 \times 12 = 1296$ cm^3



Rappel

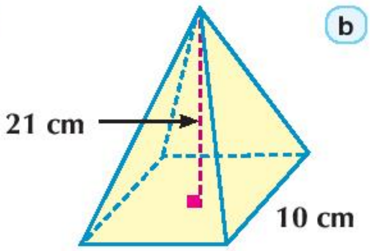
L'aire d'un polygone à n côtés de longueur de côté x est égale à

$\frac{n}{4} x^2 \cot \frac{\pi}{n}$

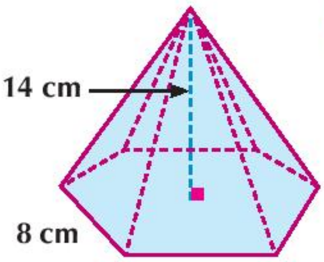
Essayiez de résoudre

(1) Trouvez le volume de chacune des pyramides régulières suivantes à l'aide des informations indiquées .

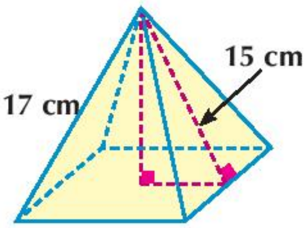
(a)



(b)



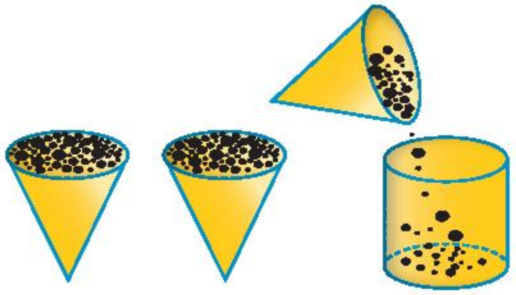
(c)



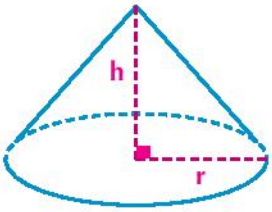
Réfléchissez : En comparant les volumes d'un cône circulaire droit et d'un cylindre droit ayant la même aire de base et la même hauteur, on trouve que :

Volume d'un cône $= \frac{1}{3}$ du volume du cylindre.

Comment peut-on interpréter cela mathématiquement ?



Volume d'un cône



Á apprendre

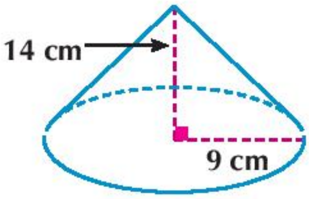
Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

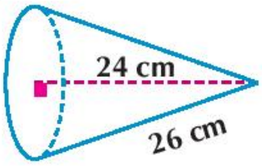
Donc : Le volume d'un cône $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

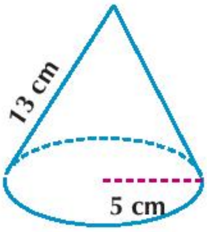
Où r est la longueur de rayon du cercle de la base du cône et h est la hauteur du cône.

Essayiez de résoudre

2) Trouvez le volume du cône droit dans chacune des figures suivantes en utilisant les informations indiquées.

a


b


c


Essayiez de résoudre

3) Un morceau du chocolat est sous la forme d'un cône droit de volume 27π cm^3 et de périmètre de base 6π cm. Trouvez sa hauteur.

Exemple

2) **En lien avec l'industrie :** Une pyramide régulière à base pentagone est fabriquée de cuivre. La longueur du côté du polygone de la base est 10 cm et la hauteur de la pyramide est égale à 42 cm. Elle a été fondue et transformée en un cône circulaire droit de longueur de rayon de base 15 cm. Sachant que 10% du cuivre est perdu durant la fente et la transformation, trouver la hauteur du cône à un dixième près.

Solution

$\because$ L'aire du pentagone régulier $= \frac{5}{4} x^2 \text{ cotg } \frac{\pi}{5}$ (où x est la longueur de côté du pentagone)

$\therefore$ L'aire de la base de la pyramide $= \frac{5}{4} \times 10 \times 10 \text{ cotg } 36° = \frac{125}{\tan 36°} \simeq 172\text{cm}^2$

$\because$ Le volume de la pyramide $= \frac{1}{3}$ aire de la base $\times$ hauteur $= \frac{172}{3} \times 42 = 2408$ cm^3

$\therefore$ Le volume du cuivre contenu dans le cône $= \frac{90}{100} \times 2408 = 2167{,}2\text{cm}^3$

$\frac{\pi}{3}(15)^2 h = 2167{,}2$ où h est la hauteur du cône droit

$\therefore h = \frac{2167{,}2 \times 3}{225\pi} \simeq 9{,}2$ cm

Essayiez de résoudre

4) On fait fondre un cube en cire de 20 cm de longueur d'arête et on le transforme en un cône circulaire droit de hauteur 21 cm. Trouver la longueur du rayon de la base du cône sachant que 12 % de la cire a été perdue durant la fente et la transformation..

Remarque importante : la capacité d'un container est estimée par le volume du liquide qu'il contient. Pour calculer la capacité d'un container, on utilise les mêmes lois de calcul de volume et l'unité de mesure de la contenance est le litre.

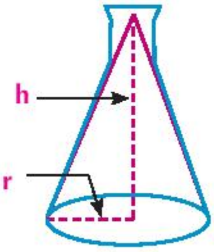
Rappel

La capacité d'un corps creux est le volume de son espace intérieur

1 litre = 1000 millilitre = 1000 cm^3 = dm^3

Exemple

(3) **En lien avec la chimie :** Une fiole de forme conique a pour capacité 154 ml et pour. hauteur 12 cm. Trouver la longueur du rayon de sa base ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)



Solution

Capacité de la fiole = volume du cône droit = 154 cm^3

$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 12 = 154 \quad \therefore r^2 = \frac{49}{4}$

$\therefore r = 3{,}5$ cm

Exercises (2 - 4)

1. Trouvez le volume d'une pyramide régulière à base quadrilatère sachant que la longueur du côté de la base est 20 cm et la hauteur de la pyramide est égale à 36 cm.

2. Calculez à un dixième près le volume d'une pyramide régulière à base pentagone sachant que la longueur du côté de la base est 40 cm et la hauteur de la pyramide est 10 cm.

3. Une pyramide régulière à base quadrilatère a pour hauteur 9 cm et pour volume 300 cm^3. Trouvez la longueur du côté de sa base.

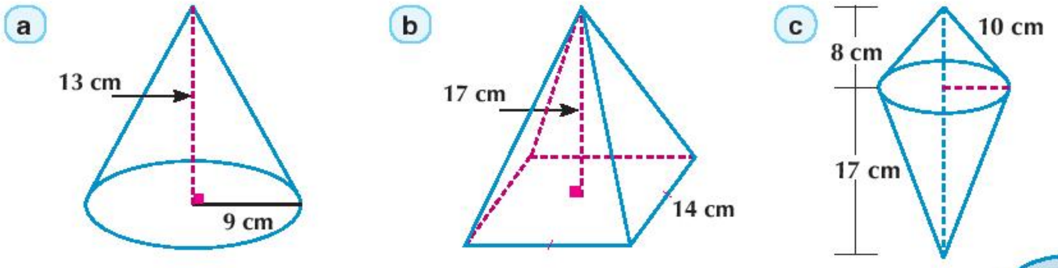
4. Une pyramide régulière à base quadrilatère a pour aire de base 700cm^2 et pour hauteur latérale 20 cm. Calculez son volume.

5. Quel est le solide qui a le plus grand volume? un cône droit de longueur de rayon de base 15 cm et de hauteur 20 cm ou une pyramide régulière à base quadrilatère de hauteur 40 cm et de périmètre de base 48 cm.

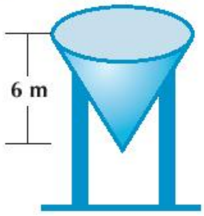
6. Trouvez le volume d'un cône droit de périmètre de base 44 cm et de hauteur 25 cm.

7. Trouvez le volume d'un cône droit d'aire latérale 220 cm et de longueur de génératrice14 cm.

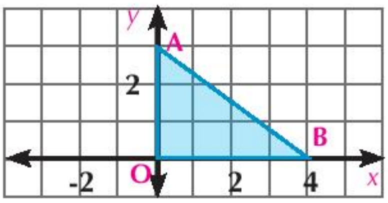
8. Rangez les solides suivants du plus petit volume au plus grand volume.



9. **Génie civil :** Un réservoir d'eau sous forme d'un cône droit a pour volume $32\pi m^3$ et pour hauteur 6 m. trouvez la longueur du rayon de sa base et son aire totale.



10. 12 La figure ci-contre indique un repère orthonormé. Calculer en fonction de π le volume du solide engendré par la révolution du triangle ABO d'un tour complet autour de :



a) L'axe des abscisses   b) L'axe des ordonnés.

2 - 5 Equation du cercle

Allez apprendre

- Ecrire l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre et la longueur de son rayon.
- La forme générale de l'équation d'un cercle.
- Déterminer les coordonnées du centre d'un cercle et la longueur de son rayon à partir de la forme générale de son équation.
- Modéliser et résoudre des problèmes de la vie quotidienne comportant l'équation d'un cercle.

Vocabulaires de base

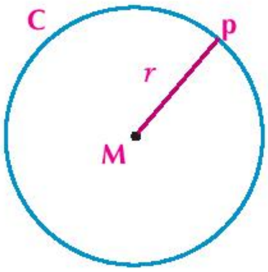
- Cercle
- Centre
- Rayon
- Diamètre
- Repère
- Equation
- Forme générale

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Papiers quadrillés

Le cercle :

C'est un ensemble de points du plan qui se trouvent à une distance donnée d'un point fixe du plan.

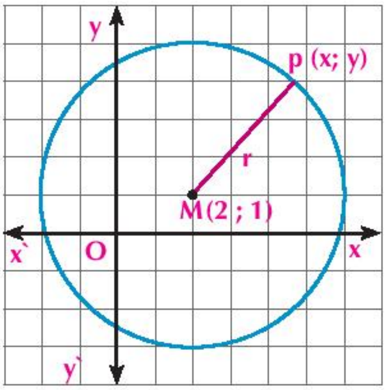


Le point fixe est le centre du cercle et on le note d'habitude M. La distance donnée est appelée le centre du cercle et on la note r. Le cercle est noté par C.

L'équation d'un cercle :

L'équation d'un cercle est la relation entre l'abscisse et l'ordonné d'un point quelconque appartenant au cercle et tout couple (x ; y) vérifiant cette relation (équation) représente un point qui appartient à ce cercle.

Dans un repère orthonormé



Si le point P (x ; y) appartient à un cercle C de centre M(2 ; 1).
et de rayon
4 unités de longueur, alors MP = r = 4 En appliquant la formule de la distance entre deux points, on obtient:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (4)^2$

$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

est l'équation du cercle C.

Rappel

La distance entre deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

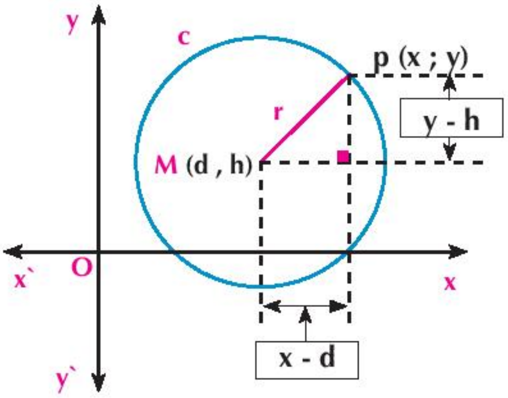
A apprendre

Equation du cercle

(en fonction des coordonnées de son centre et de la longueur de son rayon)

Dans un repère orthonormé :

Si le point P(x ; y) appartient au cercle C de centre le point M (d ; h) et de rayon de longueur r unités, alors l'équation du cercle est :



$$(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

Exemple

1) Ecrivez l'équation du cercle de centre le point M(5 ; 2) et de longueur de rayon 6 unités.

Solution

Soit P(x ; y) ∈ au cercle C

$\because$ Le centre du cercle est le point M(5 ; 2) et le longueur de son rayon = 6 unités

$\therefore d = 5$, $h = 2$, $r = 6$

, Donc l'équation du cercle est : $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (6)^2$

d'où : $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$

Essayez de résoudre

1) Ecrivez l'équation du cercle de centre M dans chacun des cas suivants :

a) M (4 ; -3) , et la longueur de son rayon est égale à 5 unités.

b) M (7 ; -1) , et la longueur de son rayon est égale à 8 unités.

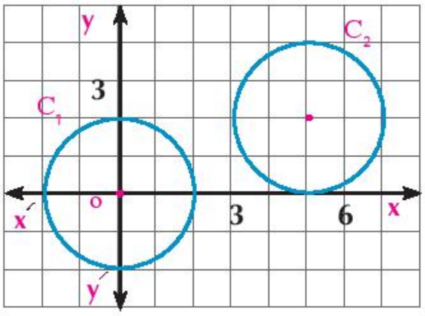
c) M (2 ; 0) , et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{28}$ unités.

d) M (0 ; -5) , et le cercle passe par le point (-2 ; -9)

e) M est le point d'origine et la longueur de son rayon est égale à r unités.

Exemple

2) La figure ci-contre représente deux cercles C_1 et C_2, Démontrez que les deux cercles sont superposables puis trouvez l'équation de chacun d'eux.



Solution

Deux cercles sont superposables si leurs rayons sont de même longueur.

Le cercle C_1: a pour centre (0 ; 0), et pour longueur de rayon $r_1 = 2$ unités .

Le cercle C_2: a pour centre (5 ; 2), et pour longueur de rayon $r_2 = 2$ unités.

$\because r_1 = r_2 = 2$ $\therefore$ Les deux cercles sont superposables.

L'équation de c_1 est $x^2 + y^2 = 4$,

et l'équation de c_2 est $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$

On remarque que : le cercle C_2 est l'image du cercle C_1 par la translation (5 ; 2)

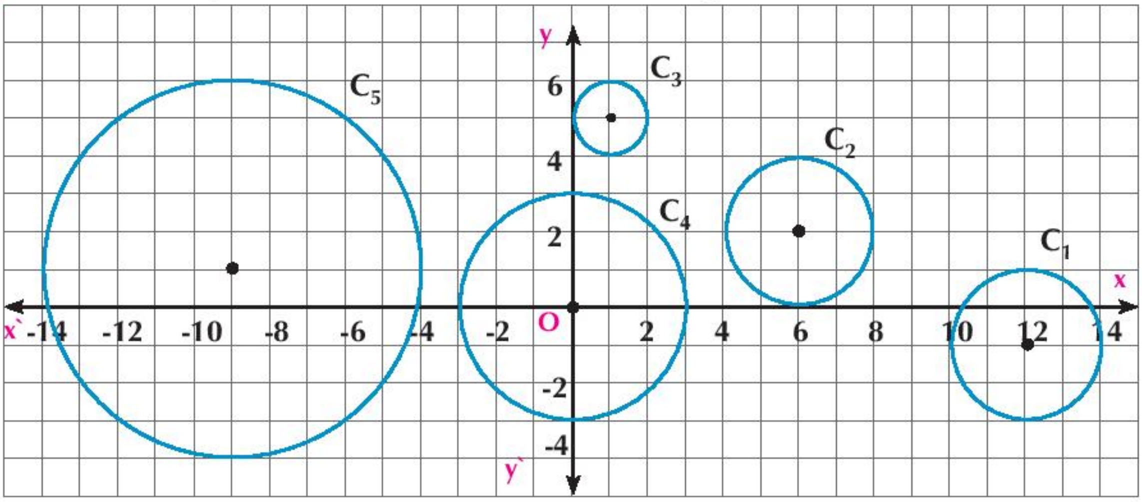
Pensé critique : Si le cercle C_3 est l'image du cercle C_1 par la translation (-4 ; 3), écrivez l'équation du cercle C_3.

Rappel

L'image du point (h, k) par la translation (a, b) est (h+a, k+b)

Essayez de résoudre

2) a) Écrivez l'équation de chacun des cercles dans la figure suivante:



b) Lesquels des cercles précédants sont superposables ? Expliquez votre réponse.

Réfléchissez : Où se trouve le point $(x_1; y_1)$ par rapport au cercle C: $(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$ si:

a) $(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2 > r^2$

b) $(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2 < r^2$

Exemple

3) Démontrez que le point (4 , -1) est un point du cercle C d'équation : $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 37$

Solution

En substituant par les coordonnées du point (4 ; -1) dans le membre gauche de l'équation du cercle.

$\therefore$ $(4 - 3)^2 + (-1 - 5)^2 = 1 + 36 = 37$ = membre de droite.

$\therefore$ Le point (4 ; -1) appartient au cercle C.

On remarque que: Si $(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 5)^2 > 37$ alors le point $(x_1; y_1)$ est situé à l'extérieur du cercle C.

et si $(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 5)^2 < 37$ alors le point $(x_1 ; y_1)$ est situé à l'intérieur du cercle C.

Essayez de résoudre

3) Lequel des points suivants appartient au cercle C d'équation : $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 25$? Déterminez la position des autres points par rapport au cercle C où :

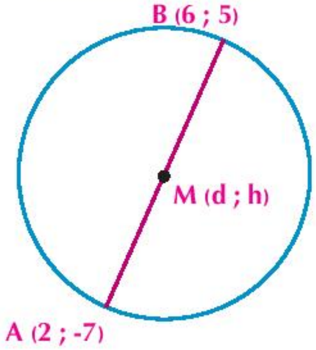
A(9 ; 3) , B(7 ; 5) , C(3 ; 3) , E(2 ; -3)

Exemple

(4) Écrivez l'équation du cercle ayant pour diamètre $\overline{AB}$ où A(2 ; -7) , B(6 ; 5) .

Rappel

Les coordonnées du milien de la distance en te les points $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2) = (\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2})$



Solution

Soit M(d ; e) le centre du cercle de diamètre $\overline{AB}$, Alors le point M est le milieu de $\overline{AB}$.

$\therefore$ Les coordonnées du point M : $d = \frac{2 + 6}{2} = 4$, $e = \frac{-7 + 5}{2} = -1$

$r^2 = (AM)^2 = (4 - 2)^2 + [-1 - (-7)]^2$

$= (2)^2 + (6)^2 = 40$

Donc l'équation du cercle est : $(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 40$

Donc : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 40$

Réfléchissez : Est-ce que le point (6 , 5) vérifie l'équation du cercle ? Pourquoi ?

Est-ce que le point (6 ; –7) appartient au cercle précédent ? Expliquez votre réponse.

Essayez de résoudre

(4) Écrivez l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

(a) Si le centre du cercle est le point M(–2 ; 7) et il passe par le point A(2 ; 10)..

(b) Si le centre du cercle est le point M(5 ; 4) et il est tangent à la droite d''equation x = 2

(c) Si M le centre du cercle est situé dans le premier quadrant du repère et si la longueur de son rayon est égale à 3 unités et les deux droites d'équations x = 1 et y = 2 sont tangentes au cercle.

Exemple

(5) Trouvez les coordonnées du centre du cercle et la longueur de son rayon pour les deux cercles d'équations :

(a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ (b) $(x + 1)^2 + y^2 = 16$

Solution

On sait que l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre (d ; e) et de la longueur de son rayon r est :

$(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$

En comparant chaque expression algébrique dans l'équation précédente à son correspondant dans l'équation donnée, on trouve que :

(a) $x - d = x - 2$ $\therefore d = 2$

$y - h = y + 3$ $\therefore h = -3$

$r^2 = 17$ $\therefore r = \sqrt{17}$

Donc le centre du cercle est le point (2 ; -3) et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{17}$ unités.

b $x - d = x + 1$ $\therefore d = -1$

$y - h = y$ $\therefore h = 0$

$r^2 = 16$ $\therefore r = 4$

$\therefore$ le centre du cercle est le point $(-1\ ;\ 0)$ et la longueur de son rayon est égale à 4 unités.

Essayez de résoudre

5. Lequel des cercles donnés représente un cercle de centre $(3\ ;\ -4)$ et de longueur de rayon 3 unités.

   a $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ **b** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

   c $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ **d** $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

6. Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon de chacun des cercles suivants :

   a $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 15$ **b** $x^2 + (y + 4)^2 = 9$

   c $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = \frac{3}{4}$ **d** $(x + 1)^2 = 13 - y^2$

Á apprendre

Forme générale de l'équation d'un cercle

On sait que l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre $(d\ ;\ h)$ et de la longueur de son rayon r est :

is : $(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$ **En simplifiant l'expression**

$\therefore x^2 + y^2 - 2dx - 2hy + d^2 + h^2 - r^2 =$ zéro (1)

$\because$ d, h et r sont constants $\therefore$ l'expression $d^2 + h^2 - r^2 = C$ (où C est une valeur constante En)

en posant $L = -d$, $k = -h$, $C = d^2 + h^2 - r^2$

Dans ce cas, l'équation (1) devient de la forme $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + C = 0$

Cette équation est appelée la forme générale de l'équation d'un cercle de centre $(-L\ ;\ -K)$ et de longueur de rayon r telle que

$r = \sqrt{L^2 + k^2 - C}$, $L^2 + k^2 - C > 0$

Exemple

6. Trouvez la forme générale de l'équation du cercle de centre $(6\ ;\ -3)$ et de longueur de rayon de 5 unités.

Solution

$\because$ Le centre du cercle dans la forme générale est $(-L\ ;\ -K)$

, et le centre du cercle est $(6\ ;\ -3)$ **donné**

$\therefore L = -6$, $k = 3$

$\because r = 5$, $C = L^2 + k^2 - r^2$

$\therefore C = (-6)^2 + (3)^2 - (5)^2 = 20$

Dans ce cas, la forme générale de l'équation du cercle est : $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$.

Nous pouvons vérifier la solution en utilisant l'équation du cercle:

$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$ puis la simplifier et comparer les résultats.

Essayez de résoudre

7) Écrivez la forme générale de l'équation du cercle si :

a) Son centre est le point M (–2 ; 5) et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{57}$ unités.

b) Son centre est le point N (5 ; –3) et le cercle passe par le point B(2 ; 1).

Exemple

7) Écrivez la forme générale de l'équation du cercle dont les deux points A (4 ; 2) , et B (–1 ; –3) sont les extrémités de l'un de ses diamètres.

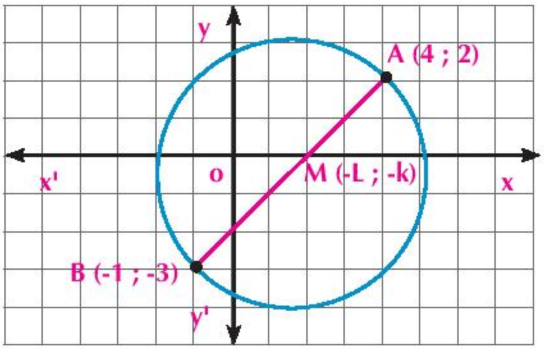
Solution

Soit le point M (–L ; –K) le centre du cercle où $\overline{AB}$ est un diamètre .

$\therefore$ M est le milieu de $\overline{AB}$, , et les coordonnées du point M sont $(\frac{4-1}{2} , \frac{2-3}{2})$

$\therefore -L = \frac{3}{2}$ $\qquad L = \frac{-3}{2}$

$-k = \frac{-1}{2}$ $\qquad k = \frac{1}{2}$



En remplaçant L et k dans la forme générale de l'équation du cercle :

$x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + C = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 3x + y + C = 0$ **(1)**

$\because$ Le cercle passe par le point A(4 ; 2), alors il vérifie son équation

$\therefore (4)^2 + (2)^2 - 3(4) + 2 + C = 0$ d'où $C = -10$

Dans l'équation (1) par substitution **(1)**

$\therefore$ L'équation générale du cercle est : $x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$

Essayez de résoudre

8) Si les points A (3 ; –2) , B(3 ; 8) et C(–1 ; 0) appartiennent au même cercle, démontrez que $\overline{AB}$ et un diamètre du cercle puis écrivez la forme générale de son équation.

Remarque importante

De la forme générale de l'équation du cercle : $x^2 + y^2 + 2Lx + 2Ky + C = 0$

on déduit que :

1) L'équation est du second degré en x , y

2) Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité.

3) L'équation n'admet pas un terme en x y c'est-à-dire le coefficient de x y est égal à 0

Pour qu'une équation du second degré en x et y représente un cercle il faut que les trois conditions précédentes soient réalisées et que $L^2 + K^2 - C > 0$.

A apprendre

Détermine les coordonnés du centre d'un cercle et la longueur de son rayon

Pour déterminer les coordonnées du centre d'un cercle et la longueur de son rayon à partir de la forme générale de son équation :

1- Vérifiez d'abord que l'équation donnée est sous la forme générale où le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité

2- Les coordonnées du centre sont $(-L, -k)$ c'est-à-dire $\left(\frac{\text{-coefficient de } x}{2}, \frac{\text{- coefficient de } y}{2}\right)$

3- La longueur du rayon du cercle est égale à r **où** $r = \sqrt{L^2 + k^2 - C}$, $L^2 + k^2 - C > 0$

Exemple

8 Lesquelles des équations suivantes sont des équations d'un cercle ? Si oui, trouver son centre et la longueur de son rayon

a $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y - 10 = 0$ **b** $x^2 + y^2 + 4x + 25 = 0$

c $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 30 = 0$ **d** $4x^2 + 4y^2 = 49$

e $x^2 + y^2 + 2xy + 3 = 0$

Solution

a Le coefficient de $x^2 \neq$ le coefficient de y^2 $\therefore$ Ce n'est pas l'équation d'un cercle

b Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = \frac{4}{2} = 2$, $k = \frac{0}{2} = 0$, $C = 25$

$\therefore L^2 + k^2 - C = (2)^2 + (0)^2 - 25 < 0$

$\therefore$ Ce n'est pas l'équation d'un cercle

c En divisant les deux membres par 2 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y - 15 = 0$

$\therefore$ Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = -3$, $k = 2$, $C = -15$

$\therefore L^2 + k^2 - C = (-3)^2 + (2)^2 - (-15) = 28 > 0$

$\therefore$ C'est l'équation d'un cercle de centre $(3, -2)$, $r = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ unités

d En divisant les deux membres par 4 $\therefore x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$

$\therefore$ Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = 0$, $k = 0$, $C = \frac{49}{4}$ $\therefore L^2 + k^2 - C = \frac{49}{4} > 0$

$\therefore$ C'est l'équation d'un cercle de centre le point d'origine et $r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ unités

e $\because$ L'équation contient un terme xy $\therefore$ ce n'est pas l'équation d'un cercle

Essayez de résoudre

9 Laquelle des équations suivantes représente l'équations d'un cercle ? Si c'est le cas, trouvez son centre et la longueur de son rayon.

a $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 17 = 0$ **b** $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

c $2x^2 + 2y^2 - 4x + 39 = 0$ **d** $x^2 + y^2 - 2xy - 6 = 0$

pensé critique : Les deux cercles $C_1 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$
$C_2 : x^2 + y^2 + 14x + 10y - 26 = 0$ sont-ils tangents extérieurement? Expliquez votre réponse.

Exercices (2 - 5)

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Le point (2 ; 0) appartient à :
   - a) l'axe des abscisses
   - b) l'axe des ordonnées
   - c) la droite $y= 2x$
   - d) le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$

2. Si A (3 ; -7) et B(–3 ; 5) , alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont ....
   - a) (0 ; 1)
   - b) (1 ; 0)
   - c) (0 ; -1)
   - d) (-1 ; 0)

3. La distance entre les deux points (2 ; 4) et (10 ; –2) est égale à .....
   - a) 9
   - b) 10
   - c) $3\sqrt{10}$
   - d) 6

4. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et du centre (0 ; 0) passe par le point ....
   - a) (1 ; 4)
   - b) (5 ; 0)
   - c) (25 ; 0)
   - d) (5 ; 1)

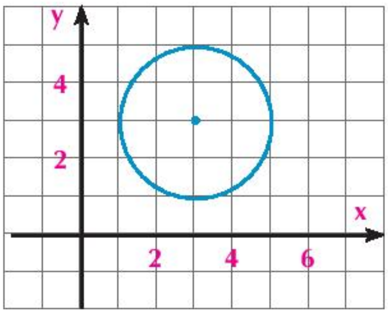
5. L'équation du cercle ayant pour centre (3 ; –5) et pour longueur de rayon 7 unités est :
   - a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$
   - b) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
   - c) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
   - d) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$

6. Le périmètre du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 8$ est :
   - a) 8π
   - b) 64π
   - c) $2\sqrt{2}\pi$
   - d) $4\sqrt{2}\pi$

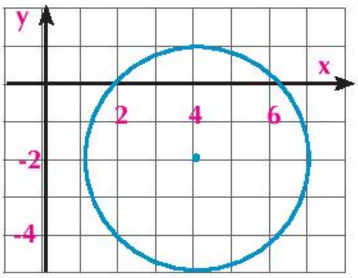
7. Ecrivez l'équation du cercle de centre M et de longueur de rayon r si :
   - a) M (2 ; 3) , $r = 5$
   - b) M(0 ; 0) , $r = 4$
   - c) M (3 ; 0) , $r = 6$
   - d) M(4 ; -5) , $r = \sqrt{7}$
   - e) M (0 ; -1) , $r = 2\sqrt{3}$
   - f) M(-4 ; -3) , $r = \frac{3}{2}$

8 Ecrivez l'équation du cercle représenté par chacune des figures suivantes :

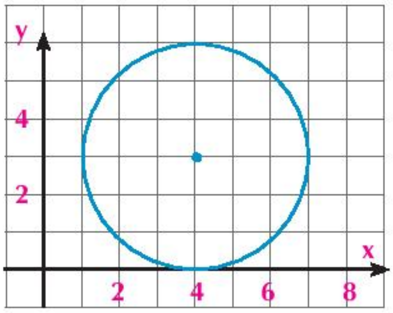
a



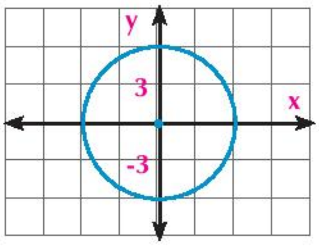
b



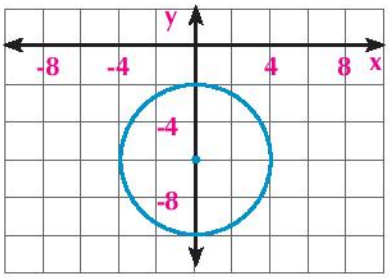
c



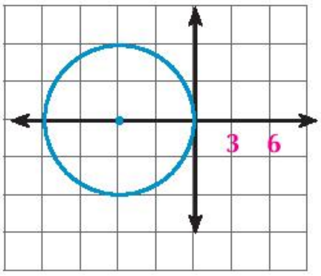
d



e



f



9 Ecrivez l'équation du cercle si :

a le centre du cercle est le point M (7 ; -5), et le cercle passe par le point A(3 ; 2).

b $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle où A(6 ; –4) et B(0 ; 2).

c le centre du cercle est le point (5 ; –3) et le cercle est tangent à l'axe des abscisses.

10 Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants:

a $x^2 + y^2 = 27$

b $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$

c $(x - 2)^2 + y^2 = 16$

d $x^2 + (y + 7)^2 = 24$

11 Ecrivez la forme générale de l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

a Le centre est M(3 ; 1) et la longueur du diamètre est égale à 8.

b Le centre est M(0 ; 0) et le cercle passe par le point (–1 ; 3) .

c Le centre est M(–5 ; 0) et le cercle passe par le point (3 ; 4) .

d $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle où A(3 ; –7) et B(5 ; 1) .

(12) **Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants**

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 2x = 8$
(c) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 8x = 12$

(13) **Parmi les cercles suivants, trouvez les deux cercles superposables :**

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 14x + 37 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x + 13 = 0$

(14) **laquelle des équations suivantes représente un cercle ? Puis trouvez son centre et son rayon :**

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 16y - 1 = 0$
(b) $x^2 + 2y^2 + 6x - 5y = 0$
(c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + x - 8 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 2xy - 12 = 0$
(e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$
(f) $2x^2 + 2y^2 + 3y - 8 = 0$

(15) **Réflexion créative :** Trouvez l'équation du cercle passant par les deux points A(1 ; 3) et B(2 ; – 4) sachant que son centre est situé sur l'axe des abscisses.